

ISSN: 2312-5810
DOI: 10.6278/tjme

第 6 卷 第 1 期
二〇一九年四月
VOL. 6 NO. 1
April 2019

臺灣數學教育期刊

Taiwan Journal of Mathematics Education



國立臺灣師範大學數學系
Department of Mathematics,
National Taiwan Normal University



台灣數學教育學會
Taiwan Association
for Mathematics Education

發行單位 | 國立臺灣師範大學數學系
台灣數學教育學會

編輯委員會

主編	左台益	國立臺灣師範大學數學系
副主編	吳昭容	國立臺灣師範大學教育心理與輔導學系
	楊凱琳	國立臺灣師範大學數學系
編輯委員	李源順	臺北市立大學數學系
(依姓氏筆劃排序)	洪儷瑜	國立臺灣師範大學特殊教育學系
	袁媛	中原大學教育研究所
	黃幸美	臺北市立大學學習與媒材設計學系
	楊志堅	國立臺中教育大學教育測驗統計研究所
	楊德清	國立嘉義大學數理教育研究所
	劉柏宏	國立勤益科技大學通識教育學院
	劉曼麗	國立屏東教育大學數理教育研究所
	劉遠楨	國立臺北教育大學教育傳播與科技研究所
	謝豐瑞	國立臺灣師範大學數學系
	譚克平	國立臺灣師範大學科學教育研究所
國際編輯委員	羅珍珍	美國西密西根大學數學系

地址	臺北市汀州路四段 88 號國立臺灣師範大學數學系 《臺灣數學教育期刊》
電話	886-2-7734-6576
傳真	886-2-2933-2342
電子郵件	tjmeassistant@gmail.com
網址	http://tjme.math.ntnu.edu.tw/contents/contents/contents.asp?id=21

主編的話

學術研究的發展與精進有賴其社群成員間順暢交流與相互砥礪。《臺灣數學教育期刊》即在提供數學教育研究社群發表研究成果論述的平台。本期刊支持多樣性觀點探討數學教育，無論是實徵性研究或具批判性理論論述之立場論文，只要是原創性論文均為本刊鼓勵發表之文章。每篇進入審查程序之文章均有一位責任編輯從中輔導與協助作者進行文稿的修訂。無論文章最後結果是否接受刊登，期盼作者皆能在過程中獲得適當正面意見。

著重核心素養的十二年國教已正式啟動。數學領域亦以數學素養為導向發展課綱。數學史文與文化融入數學教學為素養導向課程設計為可行方式。本期刊登之三篇文章均為數學史融入數學教學(HPM) 研究論文，可視為本期刊第一期發行之特刊：HPM 特刊。

本期第一篇文章是由蘇惠玉發表之《HPM 實踐在臺灣：以《HPM 通訊》為研究個案》，在臺灣數學教育變遷的脈絡下，從三個面向探討台灣 HPM 實踐的演變。此文最後以數學敘事特性說明 HPM 實踐進路的最新演變，期許能在新課綱素養導向數學教學設計中有所啟發。第二篇由蔡文榮、張鈞淇、劉柏宏共同發表之《臺灣學術界數學史研究之現況分析與建議：以 1992 年至 2017 年學位論文為例》，此研究主要探討目前台灣學術界有關數學史研究、數學史融入教學現況與發展趨勢以及對數學史教學研究的啟示，並提出教學建議。第三篇文章由黃俊瑋發表之《和算知識中的術、法、表之意義與特色》，此文探討和算所發展的數學知識類型-數、法、表-它們的意義與功能，並比較其間差異。此研究對於數學教育與數學史研究之連結，開啓更多元面向之論述與研究進路。

本期 HPM 特刊展現不同樣貌的數學教育研究，盼能給讀者有用的參考資訊與啟思。本期刊能順利發行，得感謝副主編、責編與編審委員的無償付出，尤其是編委劉柏宏全期責任編輯，得以形成 HPM 特刊。同時也期盼各界繼續支持，踴躍投稿。

《臺灣數學教育期刊》主編

左台益 謹誌

臺灣數學教育期刊

第 6 卷 第 1 期

2014 年 4 月創刊

2019 年 4 月出刊

目錄

- HPM 實踐在臺灣：以《HPM 通訊》為研究個案 1
／蘇惠玉
- 臺灣學術界數學史研究之現況分析與建議：以 1992 年至
2017 年學位論文為例 27
／蔡文榮、張鈞淇、劉柏宏
- 和算知識中的術、法、表之意義與特色 53
／黃俊瑋

Taiwan Journal of Mathematics Education

Vol. 6 No. 1

First Issue: April 2014

Current Issue: April 2019

CONTENTS

- HPM Practice in Taiwan: A Case Study of HPM Tongxun (HPM Newsletter) 1
/ Hui-Yu Su
- Analysis of current state and recommendations for HPM research in Taiwan: The case of theses and dissertations from 1992 to 2017 27
/ Wen-Rong Tsay, Chun-Chi Chang, Po-Hung Liu
- The meanings and characteristics of mathematic knowledge in Wasan — Jutsu, hō and Hyō 53
/ Jyun-Wei Huang

蘇惠玉 (2019)。

HPM 實踐在臺灣：以《HPM 通訊》為研究個案。

臺灣數學教育期刊，6 (1)，1-26。

doi: 10.6278/tjme.201904_6(1).001

HPM 實踐在臺灣：以《HPM 通訊》為研究個案

蘇惠玉

臺北市立西松高級中學

《HPM 通訊》自 1998 年創刊至今，共發行 21 卷 185 期 798 篇文章。這些文章記錄了臺灣 HPM 實踐發展與演變的過程，同時也見證了臺灣數學教育這 20 年來的變遷。本文嘗試在臺灣數學教育變遷的脈絡下，探討臺灣 HPM 實踐的演變，並從數學教育研究計畫與研討會參與、課程綱要的變革與教學活動與數學文化素養的連結這幾個面向來論述。在分析《HPM 通訊》文章的同時，以對數單元的融入教學為例，說明臺灣 HPM 實踐在融入課程教學時層次深淺的指標。最後以數學與敘事的特性說明臺灣 HPM 實踐進路的最新轉變，期許這樣的 HPM 實踐進路，在 108 課綱強調的數學素養中，能為中學數學教師帶來課程設計的新啟發。

關鍵詞：HPM、HPM 通訊、數學文化素養、數學史

通訊作者：蘇惠玉，e-mail：suhy1022@gmail.com

收稿：2018 年 12 月 26 日；

接受刊登：2019 年 3 月 21 日。

Su, H. Y. (2019).

HPM practice in Taiwan: A case study of HPM Tongxun (HPM Newsletter).

Taiwan Journal of Mathematics Education, 6(1), 1-26.

doi: 10.6278/tjme.201904_6(1).001

HPM Practice in Taiwan: A Case Study of HPM Tongxun (HPM Newsletter)

Hui-Yu Su

Taipei Municipal Xisong High School

Since its inception in 1998, 798 articles have been published in 21 volumes and 185 issues of HPM Tongxun (HPM Newsletter). These articles have documented the process of development and evolution of HPM practice in Taiwan as well as changes in Taiwan's mathematics education over the past 20 years. This article explores the evolution of HPM practice in relation to changes in mathematics education in Taiwan by discussing mathematics education research projects, seminar participation, syllabus transformation, and the connection between teaching activities and literacy for mathematics culture. By analyzing the articles of HPM Newsletters, this study uses the teaching of logarithms as an example to explain the indicators of HPM practice, which integrates history into mathematics teaching, in Taiwan. Finally, the latest changes in approaches to HPM practice in Taiwan have incorporated mathematics and narrative characteristics. Such an approach to HPM practice is expected to provide new inspirations to curriculum designs for high school mathematics teachers in terms of the mathematical literacy emphasized by the new curriculum implemented in 2019.

Keywords: HPM, HPM Tongxun, literacy for mathematical culture, history of mathematics

Corresponding author : Hui-Yu Su , e-mail : suhy1022@gmail.com

Received : 26 December 2018;

Accepted : 21 March 2019.

壹、前言

HPM 源自 1972 年第二屆國際數學教育會議 (ICME-2) 中的一個「數學史與數學教學」的工作團隊 (a work group on “History and Pedagogy of mathematics”), 從 1984 年之後, 改以衛星會議的形式舉行, 每四年在 ICME 舉辦會議城市的臨近國家擇一城市舉辦, 同時也在 1984 年的這一場會議中, 正式更名為我們熟知的 HPM (International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics) (歐士福, 2003)。由於 2000 年的 ICMI-9 決定在日本舉辦, 因而作為衛星會議的 HPM-9 選擇在鄰近的台北, 由洪萬生負責統籌主辦。《HPM 通訊》發行人洪萬生於 1996 年首度參加國際 HPM 會議 (洪萬生, 1998a), 並將 HPM 的概念與方法引入臺灣。《HPM 通訊》原名為《台北 HPM 通訊》, 於 1998 年創刊, 原本是為 2000 年 8 月 9-14 日在台北舉行的 “HPM 2000 Taipei” 研討會而發行, 之後轉型為提供數學教師一個可以分享他們有關 HPM 實踐之心得與經驗分享的平台, 並於第 2 卷 8/9 期合刊更名為《HPM 通訊》持續發行至今。本文所謂的 HPM 實踐泛指參與 HPM 研究, 或將 HPM 研究成果應用於教學或教學活動之設計。這段期間臺灣的中學數學教育歷經了九年一貫課程綱要的動盪與改革, 2019 年又即將迎來十二年國民基本教育課程綱要所帶來的全新挑戰, 數學教師們在教學上必須隨時因應社會的變遷、課程綱要的理念與學生的需求而調整。同時, 近年來在各種教學理念與教學法紛紛出籠之際, HPM 作為數學史應用在教學上的一種方法有何變化? 作為臺灣數學教師在 HPM 實踐上, 經驗交流與增能進修最初與最專業的平台, 分析《HPM 通訊》上刊登的文章, 即可看出臺灣從 1998 至 2018 年這 21 年來, 中學數學教師因應外在環境變化時, 在 HPM 實踐上觀念與方法的改變。

本文以內容分析的方法分析《HPM 通訊》(以下簡稱通訊) 上刊登的文章, 並嘗試在臺灣數學教育變革的歷史脈絡下, 說明這些因素所帶來的在 HPM 實踐的演變, 並以實際的案例比較具體說明何謂 HPM 實踐在層次上的變化, 以及各種實踐進路不同之處; 同時在與類似刊物如美國 *Convergence* 雜誌與中國的《上海 HPM 通訊》內容分析比較下, 更可看出臺灣 HPM 實踐的特色。本文透過《HPM 通訊》文章分析論述過去 20 年臺灣在 HPM 實踐上的演變, 以此為根基, 期許能讓臺灣 HPM 實踐的參與者更加看清楚在 HPM 實踐上未來應走的方向。

貳、《HPM 通訊》及其歷史脈絡

《HPM 通訊》發行人為洪萬生, 於 1998 年 10 月發行第一期, 由蘇惠玉擔任主編, 編輯群包括蘇意雯、英家銘, 以及多位中學數學教師。原名《台北 HPM 通訊》, 發行一年之後, 於 1999 年 9 月更名為《HPM 通訊》, 時至 2018 年 11 月為止, 共發行 21 卷, 185 期, 刊登過 798 篇文

章。通訊上刊登的文章沒有設定學術門檻，「撰稿者只要針對 HPM 或數學教育等議題，順手拈來，但求文句通順、語氣平和即可（洪萬生，1998a）」。若以文章內容論述的主題來進行分類，這些文章大致可分為：數學史研究、HPM 相關、數學教育議題、數學藝術與文學、數學普及書籍評介、訊息公告、其他雜談等，「我們的論述策略是環繞著 HPM／數學史，然後，以幅射方式向外擴張，希望能儘可能涵蓋數學教育的所有相關議題（洪萬生，2003）」。主筆者除了幾位大學教授外，大多為研究生或中學數學教師。這 21 卷 185 期中，也刊登了幾次以主題來策畫的特刊，如下：

- 《算數書》特刊（第三卷第十一期）
- 再論《算數書》特刊（第五卷第二、三期合刊）
- 科普書籍書評專刊(I)（第三卷第十二期、第四卷第一期）
- John Fauvel 紀念專輯（第四卷第六期、第七期）
- 出版阿拉伯數學史專輯（第四卷第十一期、第十二期）
- 數學普及著作推介專輯(II)（第七卷第十二期）
- 「95 學年度高中數學暫行綱要」專輯（第八卷第一期）
- 數學歸納法專輯（第八卷第二、三期合刊、第四期）
- 科普數學推介專輯（第八卷第十二期）
- 海龍公式專輯（第九卷第四期）
- 《算數書》研討會特刊（第九卷第九期）
- 《數》簡特刊（第十五卷第十一期）
- 2016 Montpellier HPM 專輯（第二十卷第一、二期合刊）

從特刊的主題來看，正好也符合筆者對《HPM 通訊》文章的粗略分類。這些特刊通常針對某一主題作全面性的論述，並配合當時數學教育議題或數學史研究的時機發行。其中 2000 年通訊上刊登的《算數書》特刊，為國際數學史界第一篇《算數書》的校勘報告，當時主筆的蘇意雯、蘇俊鴻、蘇惠玉、陳鳳珠、林倉億、黃清揚與葉吉海老師也是《HPM 通訊》編輯委員中的核心成員，這些成員被道本周（Joseph W. Dauben）稱為“Tongxun Group（通訊團隊）”，加上後來加入的英家銘、陳彥宏、黃俊瑋等擔任編輯委員，這些成員同時也是臺灣 HPM 實踐的主力戰將。通訊團隊於 2012 年再度發行《數》簡特刊，這種數學史的研究特色除了讓臺灣的 HPM 團隊在國際學術上建立名聲之外，也為這些中學教師在 HPM 實踐上加入史學素養上的底蘊，成為臺灣 HPM 實踐的一大特色。

一、影響臺灣 HPM 實踐演變之因素

在通訊所有文章中，本文僅分析研究與 HPM 實踐相關之文章。首先依文章內容所涉及的

HPM 應用方式進行分類，將有關之文章分成以下幾類：

1. HPM 概念與方法：內容論述一般性的 HPM 理論與實踐方法，沒有提及教學應用之範例。
2. 提及教育關懷：在文章中有明確論述到可應用於某單元的教學中，此教學單元有明確指涉，但沒有具體的實踐方法。
3. 含實踐方法：作者在文章中有明確說明應用 HPM 研究史料的方法。
4. 中學數學史材料：雖然沒有實踐方法，但是文章的主題與內容扣緊中學數學課程中的某一單元或概念，對此單元的相關史料內容作完整的補充與說明。
5. 閱讀與文化素養應用：提及以書籍、電影等各類與數學文化有關之文本的閱讀、視聽與寫作作為教學策略之文章。

筆者依上述類型之定義對通訊文章進行挑選與分類，並以簡單的兩個時期做各種類文章在篇數上的紀錄。就時間深度而言，筆者以 2000 年 HPM 台北會議作為時間的區分點，前 4 卷（至 2001 年）時期為 HPM 引入初期，到第 4 卷為 HPM 台北會議所做的準備與研究告一段落；之後各卷的文章大都為作者們在參與研究以及個人教學上的研究與心得。這樣的分類與紀錄方式，不僅可以讓筆者看到臺灣在 HPM 實踐上的變化，更可在時間軸上配合臺灣數學教育變革的脈絡，探討這些變化的原因。表 1 為通訊中，與 HPM 實踐有關之文章的分類紀錄：

表 1

《HPM 通訊》中 HPM 相關文章分類

類別	前 4 卷篇數	卷 5~卷 21 篇數	總篇數
HPM 概念與方法	33	38	71
提及教學關懷	23	28	51
含實踐方法	4	33	37
中學數學史素材	13	47	60
閱讀與文化素養應用	0	25	25

再進一步對各種類文章的內容作進一步的分析與比較後，發現這些文章實質上伴隨著臺灣 HPM 研究與數學教育改革的風潮一起前進。這些影響中學數學教師在 HPM 實踐進路上的改變，以及直接影響他們教學現場的研究與教育的變革，包括下面幾個面向：

（一）HPM 相關研究計劃與研討會的參與

在 HPM 的概念引入臺灣之後，陸續有多位教授申請相關的教育研究計畫，譬如柳賢、林炎全以及洪萬生。以洪萬生為例，他在 1999 至 2001 年推行『古代數學文本在課堂上的使用』研究計畫（洪萬生，1991）；2002 至 2003 年推行『數學教師專業發展與 HPM』研究計畫（洪萬生，2002c）；2004 至 2005 年推行『中小學數學教師學科知識的縱深統整：以結合 HPM 的探究為進

路』(洪萬生, 2004)。由於通訊文章的主筆者多為洪萬生的學生, 亦參與這些研究計畫, 透過研究計畫形成的 HPM 社群團體的討論與分享, 讓這些參與研究者對 HPM 的理解與 PCK (Pedagogical Content Knowledge, 學科教學知識) 的增長皆達有顯著的幫助。同時, 在 2000 年的 HPM 台北會議之後, 國內的 HPM 研究與實踐案例頻繁在國際研討會上曝光。透過這些國際研討會參與者的論文摘要或心得, 《HPM 通訊》也一起見證了國際學術研究的進展。其中讓國內年輕的研究者或中學教師獲益最多的, 當屬 2004 年於台中師範學院舉辦的「Asia-Pacific HPM 2004 / 「歷史、文化與資訊時代的數學教育」研討會」, 以及 2007 年中央研究院數學研究所主辦的「利瑪竇與徐光啟合譯《幾何原本》四百週年紀念研討會」, 通訊團隊的多位教師皆參與了這兩次的研討會。研討會的參與除了讓與會的中學教師充分暴露於國際學術環境之中, 還得以分享國際研究成果。

(二) 課程綱要的變革

在 2000 年時, 臺灣中小學的數學教育課程有了根本上的變化。為回應社會各界對教育改革開放的需求, 教育部於 1998 年 9 月公布《國民中小學九年一貫課程綱要》(教育部, 1998), 2000 年公布數學科《九年一貫課程暫行綱要》, 並從一年級 (90 學年度), 七年級 (91 學年度) 開始實施。暫行綱要倉促上路之後, 由於建構式教學產生的許多問題, 於 2003 年 11 月又提出數學領域的《國民中小學九年一貫課程 (正式) 綱要》, 於 94 學年度的一、七年級開始實施 (張幼賢, 2007)。在高中端, 為配合國中小的九年一貫課程綱要, 高中部分於 2006 年實施《普通高級中學課程暫行綱要》; 之後參酌高中 95 暫綱實施的意見, 強化課程的連貫與統整, 於 2008 年發布《普通高級中學課程綱要》(教育部, 2008), 並延後一年至 99 學年度開始實施。新的課綱帶來新理念、新想法與新要求, 也為以中學教師為主的臺灣 HPM 實踐提供不同的思維, 讓 HPM 實踐策略有了更多樣的變化。

(三) 教學活動與數學文化素養的連結

隨著 108 課綱實施在即, 數學素養的議題持續延燒, 如何在教學活動中培養學生的數學素養成為熱門研習主題。再者, 從九年一貫課程到之後的 108 課綱, 中學數學教師必須開設與一般數學課程不同的多元選修特色課程, 老師的增能成為迫切的一種需求。近年來, 在中學教育現場第一線的教師之中, 也因此正瀰漫著一股改變的氛圍。這股氣氛可以從 2015 年開始第一場的「夢的 N 次方—教師專業自主社群研習」(<https://dream.k12cc.tw/>) 中感受到, 也可以 2013 年成立的數學教師社群「數學咖啡館」帶動的翻轉教育形式與分享的無數教案學習單中看到。許多的中學數學教師們在「快樂玩出數學力」的信念之下, 願意犧牲假日, 研習如何將心智地圖、數學魔術、密室逃脫遊戲、桌遊、摺紙等等融入教學, 藉此來引動學生的數學學習以及增加

學生的數學素養。另外，以閱讀與數學文化素養為訴求的活動，搭上數學小說興起的熱潮，透過近 2, 3 年來幾個團體舉辦的科普與數普書籍閱讀寫作比賽，其影響力也正滲透進校園之中。譬如勤益科技大學通識教育學院主辦的全國技專院校「文以載數」創作獎；台大科學教育發展中心主辦的「2017 台積電盃青年尬科學」的「看見數學」競賽活動，主旨為「從數學小說的閱讀過程中看見數學」，參加活動的學生以高中生為主。另一個以國高中生為主的活動為「數感實驗室」（主持人為臺灣師大賴以威）首度主辦的「2018 年數感盃青少年寫作競賽」，此競賽鼓勵學生跨領域學習，運用數學知識，培養及展現邏輯思考與文字撰寫的能力，以期提升臺灣青少年科普寫作的風氣以及對數學的興趣。在這兩股不同教學活動進路中，透過 HPM 當中固有的對文化脈絡的感知與應用，臺灣的 HPM 實踐在中學教師的創意之下，從閱讀和數學文化素養著手，也帶來新的實踐思維與形式。

本文將在第肆節中，將《HPM 通訊》中文章置於這幾個面向的脈絡之下，來考察臺灣在 HPM 實踐上的演變。不過在此之前，我們先從幾個範例來說明臺灣 HPM 實踐的手法與進路。

參、臺灣 HPM 實踐演變的範例

在所有的 798 篇文章中，很湊巧地，在不同時期有不同的教師分享了同一單元的數學史融入教學的形式與內容。第一組為三篇以對數為例的數學史融入教學，分別是〈對數雜談〉（洪誌陽，1999）、〈數學史融入教學—以對數為例〉（蘇俊鴻，2003），以及〈數學史融入教學—以對數表為例〉（林倉億，2010），因此藉由分析比較這三篇文章，可釐清臺灣在 HPM 實踐上手法與層次上的不同。另一組以機率期望值為主題，分別是〈「古代數學文本在課堂上的使用」之教學報告—機率〉（蘇意雯，2000）、〈「數學期望值」學習工作單〉（蘇慧珍，2003），以及〈機率的大秘密〉（李政憲，2010）與〈機率發展的第二樂章〉（蘇惠玉，2016），從這幾篇同一主題的文章之中，將可看到臺灣在 HPM 實踐進路上的多樣與可能性。同時，國際上亦有許多類似《HPM 通訊》的刊物，透過這些刊物內容分析，亦可大致了解臺灣的《HPM 通訊》在內容上與 HPM 實踐上的特色。

一、HPM 實踐的手法與層次之比較

在 HPM 的實踐上，運用數學史至少可以分三個層次（洪萬生，1998b）：

- (1) 說故事，對學生的人格成長會有啟發作用。
- (2) 在歷史的脈絡中比較數學家所提供的不同方法，拓寬學生的視野，培養全方位的認知能力與思考彈性。
- (3) 從歷史的角度注入數學知識活動的文化意義，在數學教育過程中實踐多元文化關懷的理想。

除此之外，數學教師實際教學時，可能更在意的是對學生學習與理解上的幫助，由數學史「滲透」進入課程單元學習的程度，亦可分出實踐上的層次。在洪萬生〈PCK vs. HPM：以兩位高中數學教師為例〉這篇論文中，以陳老師為例說明教師在 HPM 實踐上的幾個階段，第一階段對 HPM 的應用停留在「表面理解」，通常用來說說與課程相關的軼事；第二階段應用 HPM 來協助詮釋教材與教法，以利用 HPM 來補充教材為主；第三階段可以將數學史融入在教學活動之中。這三個階段通常也是對數學史有初略認識的教師在 HPM 結合 PCK 時可能經歷的階段（洪萬生，2005b）。

以對數這三篇文章為例，洪誌陽在文章中融入數學史的方式以說故事與背景史料補充為主，他在文章中提及：

對數的出現背景介紹，對學生學習也有正面的幫助。……甚至可以提及 Napier 處理的基本想法、缺點，及 Briggs 常用對數表的處理。第一張對數表花了 Napier 二十年，誰能不被震撼？這其實是一個很好的典範，學生可以從中學到，一套似乎繁瑣的理論，起源的想法是那麼簡單；而且一個想法的完成，是要堅持與毅力的（洪誌陽，1999，p. 11）。

洪誌陽以說故事與背景介紹的方式融入數學史，可算是第一層次的應用，早期的 HPM 實踐大多屬於這種層次應用，譬如在〈「古代數學文本在課堂上的應用」之教學報告：機率〉中，蘇意雯（2000）以介紹機率論問題的起源、數學家巴斯卡軼事等，單元教學時以史料的補充為主。

同樣的對數單元教中，蘇俊鴻將數學史料以學習單的方式融入教學：

希望經由此一學習單的活動，能使學生重新了解對數概念的歷史發展上，並非經由指數而來，反倒是等比數列與等差數列扮演著決定性的角色。進一步深化對數概念的認知（蘇俊鴻，2003，p. 17）

他所設計的學習單，以問題與討論的形式引導學生反思史料內容，以及學習對數運算性質，譬如在第一張學習單「Chuquet 的觀察」提問：「請試著說明 Chuquet 觀察到 Numbers 與 Denomination 之間的什麼現象？」以及「試著評論 Chuquet 這項數學研究的啟發為何？不足的地方為何？」同時在「Napier 的對數(3)」的學習單中，以問題引導學生學習本單元的數學性質：

1. 同上說明，如果取 $t = \sqrt[3]{r}$ ，則當 Q 點走到 t 時， P 點走到那裏？當 Q 點走 t^4 時， P 點走到那裏？
2. 根據上述 P 、 Q 兩點運動的對應關係，很容易觀察出 $\log 1 = 0$ 。試著利用“若任意長度的兩個區間 $[\alpha, \beta]$ ， $[\gamma, \delta]$ ，滿足 $\beta/\alpha = \delta/\gamma$ ，則 Q 點通過 $[\alpha, \beta]$ 的時間與通過 $[\gamma, \delta]$ 的時間相同。”的現象，推導出下列 $\log x$ 的性質：
 - (1) $\log(\delta/\gamma) = \log \delta - \log \gamma$ (Hint: 不妨設 $\beta = 1$)
 - (2) $\log(\beta\gamma) = \log \beta + \log \gamma$ (蘇俊鴻，2003，p. 20)

蘇俊鴻在學習單上適切地提供了數學史脈絡的反思，與數學知識上的探索，雖然應用了 HPM 來詮釋教材，不過仍偏向補充教材的形式，比較接近第二種層次的應用。這種層次的應用方式，亦可見於蘇惠玉的〈曲線下面積學習單的設計〉中，她利用相關史料中的例子來增進學生對求曲線下面積之基本概念（分割求和逼近）的理解（蘇惠玉，2004a）。

反觀林倉億（2010）的教學設計，結合教師個人 PCK 與教學經驗，「在教完對數函數的圖形之後，利用數學史來引入對數表，希冀由此讓學生體驗到前人製作對數表的堅持與辛苦」，將數學史料剪裁成以 $\log 2$ 的計算活動為主，學生在學習的過程中，可以自然地將數學史上的方法融入到自身對數的學習過程中。譬如在他的「學習單 2-1 $\log 2 = ?$ 」讓學生經由計算實際體驗數學家的想法之外，還能從教師提供的史料思考數學知識活動的社會文化意涵：

1. 拿起你的計算機，利用布里格斯的方法，多試幾個 n 看看。
2. 從流傳下來的兩人畫像，你覺得哪個人的社會地位較高？為什麼？（林倉億，2010，p. 13）

林倉億（2010）的教學與學習單設計，適切地將數學史「滲透」進入學生的課程學習之中，可說是在 HPM 實踐上的一個相當好的示範。從另一角度來看，從臺灣 HPM 實踐的時間縱向來反省，經過 20 年在 HPM 實踐上的磨練，通訊團隊的這些數學教師們，從以補充背景史料為主 HPM 實踐方式開始學習，到如今已能圓融地將數學史滲透入課程教學之中。

二、HPM 實踐進路之比較

另一組關於機率與期望值的 4 篇文章中，蘇意雯的文章為『古代數學文本在課堂上的使用』之研究計畫的成果，在此篇文章中，蘇意雯介紹機率論問題的起源、數學家巴斯卡軼事等（蘇意雯，2000）。她的數學史的融入方式，即典型的數學史使用方式之一，以史料補充知識發展脈絡或數學家事蹟為主。不過蘇意雯這篇文章有附上學生問卷的結果分析，除了預料中的正面回饋之外，仍有少部分學生認為「考試不會考」、「對學習沒有幫助」、「不會算的還是不會算」，這些通常也是以說故事或史料補充作為融入方式時常見的負面回饋。

另外一篇蘇慧珍的〈「數學期望值」學習工作單〉則是另一個研究計畫『數學教師專業發展與 HPM』的成果。她挑選歷史上數學家們對於「賭金分配」的幾種方法，引起學生探索的興趣，「一方面讓學生可以欣賞其他解法，另一方面，筆者也有意藉此觀察學生的觀念是否正確」（蘇慧珍，2003，p. 4），她希望學生能從數學家錯誤的解決方法中，了解自己的學習困難癥結之所在（蘇慧珍，2003），因此在關於賭金分配的歷史問題融入設計時，她認為有下列兩種方式，並選擇第 2 種方式：

1. 提問後，由學生開始討論其解法應為何，教師並適時指導。
2. 提問後，以隱匿作者名字方式舉出各種解法，讓學生判別各解法之可行性。

（蘇慧珍，2003，p. 4）

蘇慧珍的 HPM 實踐方式，也是典型的將數學史料融入課程學習的方式，只是她採取與蘇意雯不同的融入策略，在歷史的脈絡中比較數學家的方法，以達到讓學生反思的教學目標，以滲入課程教學的程度而言，當然比僅是說故事或知識背景補充要深入得多。

2007 年，通訊團隊的幾位教師與國立教育資料館（後來改為國家教育研究院）合作，在張海潮的指導下，製作數學領域〈III〉內的數學史系列共十個單元的動畫影片，由蘇意雯、蘇惠玉與陳彥宏創作數學史劇本，從此臺灣的 HPM 實踐開啟了新的可能與進路：創作數學史劇本，利用劇本的故事性，將數學發展的故事融入教學之中。這種新的實踐進路可見證於〈圓錐曲線的腳本設計〉（蘇惠玉，2007），以及李政憲（2010）編寫的〈機率的大秘密〉。李政憲將機率與期望值相關的數學史料編成故事，融入師生的對話之中。從這些對話中，可以發現以劇本對話的形式進行的 HPM 實踐帶來的優點，亦即較容易呈現教案與學習單中看不到的學生認知過程以及認知衝突。譬如同樣是賭金分配問題脈絡，李政憲利用對話呈現了學生對此問題的認知衝突：

小翔嘟囔著：「不會算那個梅什麼的贏就好了嗎？幹嘛那麼辛苦。」

明耘接著：「因為他的朋友也有反敗為勝的機率啊！」

小翔不甘示弱：「可是他贏的機率比較大啊！」

明耘又回一句：「所以才要算兩個人贏的機率與比例啊！」（李政憲，2010，p. 12）

這種 HPM 實踐的進路，明顯不同於蘇意雯與蘇慧珍的實踐方式，以劇本說故事的方式更可進一步發展成數學小說，更加大了 HPM 實踐的多樣性。

通訊中還有另一篇文章有相同的主題，卻有不同的實踐形式，即蘇惠玉（2016）的〈機率發展的第二樂章〉。蘇惠玉這篇文章乍看之下像是純粹的數學史發展文章，然而從文章內容可以發

現她試圖從賭金分配帶來的期望值觀念出發，將高中課程中的機率－期望值－伯努利試驗－二項分布－常態分佈曲線這條線性發展主軸中的鴻溝，以知識的發展過程賦予學習動機以及作知識點的連結（蘇惠玉，2016）。雖然這樣的實踐方式，也是典型的數學史融入手法，不過可以看出與蘇意雯及蘇慧珍兩位老師在實踐方式上的不同，蘇惠玉的這篇文章從教師個人對 PCK 的理解，整合高中課程，並以統整的方式使用於多元選修課程之中。從高中 95 暫綱開始實施的多元選修特色課程，大大開放了 HPM 實踐的可能性，較彈性的課程規劃與沒有上課進度壓力，使得教師在規劃這類課程時，可以盡情發揮教師個人的創意與專業能力。這種多元選修特色課程的實踐新進路，亦見證於通訊後期的文章，筆者將於第肆節再詳加說明。

三、國際類似刊物之比較

國際上有許多類似《HPM 通訊》的刊物，皆以增進教師對 HPM 的應用為主旨，譬如美國的 *Convergence*，以及中國的《上海 HPM 通訊》。這類型的刊物所刊登的文章，大多含有數學史素材的研究，以及教師如何應用 HPM 的教學範例。先以 *Convergence* 為例，2004 年美國數學協會（Mathematical Association of America [MAA]）與美國數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]）在考慮了數學史於教學上使用的便利需求後，合作創刊 *Convergence* 這個線上雜誌（張復凱，2004）。在 MAA 與 NCTM 出版的刊物多種刊物中，*Convergence* 聚焦在為數學教師使用數學史教學提供豐富的資源。從 2004 年第 1 卷到筆者檢索的 2019 年第 16 卷（至 2019 年 2 月），除了特定的專欄之外，共有 185 篇文章，其中提及教學應用的文章有 44 篇，其餘多為數學史素材的相關研究。

Convergence 中除了有豐富的數學史研究結果可供應用之外，更設有專欄提供數學家傳記、珍貴的原始數學文獻之圖片，以及數學概念、定義、符號等的起源，這個部分在《HPM 通訊》中較少出現，畢竟在臺灣要接觸原始的數學文獻並不是那麼容易，不過通訊中刊登過與 HPM 相關之網站的介紹，儘管有時空背景的不利條件，透過網路卻也拉近了臺灣中學教師與世界的距離。與通訊相同的是，在 *Convergence* 中亦不時刊登科學普及或數學普及類的書籍介紹與評論，同時 *Convergence* 也刊登過數學詩的創作，可見臺灣在 HPM 實踐進路上的走向，與美國 HPM 學者對 HPM 應用的方向看法是一致的，亦即應將 HPM 的應用範圍納於數學文化素養之中，以多元多樣的數學文化素養作為 HPM 實踐的進路。

在中國發行的《上海 HPM 通訊》於 2012 年創刊，由上海華東師範大學教師教育學院的汪曉勤擔任主編，編輯群與文章作者大多為他所指導的學生，並在創刊語中明確的列出他們的目的：營造純淨的學習氣氛、促進頻繁的思想交流與培育優秀的學術論文。從 2012 年第 1 卷到筆者檢索的 2018 年第 7 卷第 3 期為止，共 39 期，刊登的文章分類有刊首語、理論視角、文獻研究、教材比較、實徵研究、教學實踐等等，同樣聚焦於數學史素材的研究與實際應用 HPM 的教

學實踐。其中有關教學實踐的文章共有 85 篇，從這些文章中分析他們應用數學史的手法，可以發現與臺灣的 HPM 實踐有相當明顯的差異，這種差異筆者認為應該來自於與參與實踐的中學數學教師在數學史學習過程中的「史學素養」，亦即對待歷史文化脈絡的方式與觀點上的差異。

在創刊號的第一篇文章〈HPM 的若干研究與展望〉(汪曉勤, 2012) 中, 汪曉勤提到他認為的 HPM 實踐研究的理想模式是由大學教師完成歷史研究獲得材料, 再由大學與中學教師合作, 根據需要對材料進行加工, 最後由中學教師進行設計與實踐, 這種大學中學教師合作的模式充分體現在《上海 HPM 通訊》教學實踐的文章之中。這種模式的優點是中學教師不必擔憂數學史能力不足或是沒有資源; 然而卻容易顯現出材料與融入方式過於一致的缺點。再者由於中學教師如果沒有受過正規的數學史訓練, 在進行數學史融入教學時就容易忽略文化脈絡, 或以現今的觀點解釋歷史事件(包括數學家使用的數學形式)。因此綜觀全部 85 篇文章, 大部分的 HPM 教學實踐形式多為補充軼事或將數學證明(解法)過程歸功於某位數學家, 譬如〈HPM 視角下的「兩角和與差的和角公式」教學〉(張益明、丁倩文, 2018) 就是一種典型的呈現方式。而臺灣 HPM 實踐會由中學教師親自根據本身的 PCK 找尋適合的史料與設計學習單, 在紮實的史學素養底蘊下, 重視歷史文化脈絡, 盡量以原形式融入課程教學的形式, 這一點與中國模式在培養學生的歷史或文化素養上將會出現不同的成效。

再者, 《上海 HPM 通訊》定位於學術論文的刊登, 因此在 39 期的文章中, 僅出現過 2 篇介紹科學或數學普及的書籍。在數學文化專欄中, 除了評論大學生編劇主演話劇「牛頓與萊布尼茲之爭」之爭外, 可以發現他們的編輯群認定的「數學文化」, 比較偏向文化中的數學(mathematics in culture), 並僅看重它的歷史面向, 而缺乏一般的文化素養, 這也是臺灣與中國顯著不同之處。臺灣的 HPM 實踐進路在近年來以數學文化素養為訴求, 除了典型的數學史融入教學之外, HPM 實踐進路的多元性與中國堅持傳統的實踐方式已有顯著的差異。

肆、臺灣 HPM 實踐之演變

在通訊所有文章中, 與 HPM 實踐相關文章之分類與篇數如第貳節表格所示, 其中提及 HPM 概念與方法, 或有關教學關懷的文章差不多均勻的分布在各卷中, 但是在後期明顯見的, 增加了許多與中學數學相關素材的文章, 以及前 4 卷沒有出現過的關於閱讀與文化素材應用之文章。從分類的數量統計來看, 這 20 年來臺灣 HPM 實踐確實經歷過一些演變。然而是什麼樣的演變, 以及形成演變的原因為何, 則必須將《HPM 通訊》的這些文章, 放在臺灣教育環境變遷的歷史脈絡下, 才能釐清變化的過程並從中找出 HPM 實踐未來的新進路。

一、HPM 相關研究計劃與研討會的參與 (1999—2005)

通訊 1998 年發行至 2000 年 HPM 台北會議期間, 初期處於推廣 HPM 階段, 因此有許多文

章在為大部分身為中學教師的讀者說明將數學史材料應用於課堂的方法，以洪萬生主筆的文章居多，加上翻譯的一些國外研究論文，因此在前 4 卷中講述 HPM 概念與方法的文章特別多。到了後期，當中學教師已經熟悉 HPM 的概念之後，這類文章的數量就減少許多了，僅有不定期的文章作為方法上的啟發之用，譬如〈數學文本的問題意識〉(洪萬生, 2002b)、〈中算史中的「張本例」〉(洪萬生, 2002a)、〈如何萃取才有意義呢〉(洪萬生, 2005a)、〈數學與敘事在教育上的應用：以通識教育和 HPM 為例〉(洪萬生、林芳玫, 2009)、〈高觀點、HPM 與拱心石課程〉(洪萬生, 2012) 等等。初期參與通訊文章寫作的中學教師，還沒有 HPM 實踐的經驗，僅介紹國高中課程中相關的數學史料與研究成果，同時在文章中附上 HPM 使用建議，以及宣導數學史融入的「好處」，因此前 4 卷這類附有「教學關懷」的文章偏多，至第 4 卷結束時共有 23 篇文章。從這幾篇文章可以發現，此時的 HPM 實踐的想法還停留在以說故事引起學習興趣，或作為補充教材呈現。

如前所述，在 HPM 的概念引入臺灣之後的幾年內，相繼有一些與 HPM 有關的研究計畫推行，通訊團隊成員大多參加洪萬生主持的三個研究計畫。其中『古代數學文本在課堂上的使用』研究計畫(1999-2001)，訓練參與計畫的中學教師以發展教案或學習工作單(第二年)的方式，在課堂上適當地融入古代數學文本(洪萬生, 2001)，此一計畫共產生 29 篇教案或學習工作單，相關之成果有一些刊登於通訊上，譬如前述的〈「古代數學文本在課堂上的應用」之教學報告：機率〉。此計畫成果刊登的幾篇文章中已透露出嘗試將史料結合單元教學的想法，譬如在〈不一樣的組合數〉中，蘇俊鴻(2001)認為「汪萊將組合數定義成三角堆的和……在實際教學中也具體可行，帶給我們另一種體會組合概念的可能」(p. 12)。以及在〈三角函數公式的托勒密方法〉中，蘇惠玉(2001)曾舉例從托勒密定理得到的正弦與餘弦定理的證明，「簡單易懂，可以當作教學上的參考」(p. 14)。

2002 年洪萬生再度推行『數學教師專業發展與 HPM』研究計畫，為參與的教師提供實作研究的機會，讓他們透過成員間的互動、學習，增進自身的數學史素養，並結合 PCK 與 HPM 來引動教師專業成長。研究團隊部分教師更將成果發表於 2004 年的「歷史、文化與資訊時代的數學教育」亞太地區 HPM 會議上，譬如蘇俊鴻的〈數學史融入數學教學：以數學歸納法為例〉(蘇俊鴻, 2004)，以及蘇惠玉的〈圓錐曲線的教學設計〉(蘇惠玉, 2004b)，這兩篇論文的部分內容亦可見諸於通訊之中。同時，因應這個研究計畫的成果而刊登的文章還有前述的〈「數學期望值」學習工作單〉。

當這些中學教師隨著教學年資的增加，能夠更精準的掌握 PCK，透過研究計畫與研討會參與的磨練，對 HPM 的實踐手法也更加成熟多元。從這幾篇文章中可以發現，此時這些中學教師開始從 HPM 的角度切入，找出在當前的中學數學課程中，在教學與學習上會產生的問題，並從

數學史中尋找解決之道。譬如，蘇俊鴻在論文中從學生學習數學歸納法時，在概念上較易出現的困難之處出發，希望「藉由數學史上對比的實際例子，讓學生感受到學習數學歸納法的必要性，期能彌補以往之不足，為數學歸納法的教學，提供另一種可能的實施方案」。他首先比較 Wallis 與 Pascal 兩人的做法，讓學生思考歸納法與數學歸納法之異同，藉此引起學生學習動機；再利用課本例子理解與掌握概念與技巧；最後以皮亞諾公設 (Peano axioms) 作後設思考 (蘇俊鴻，2004)。而蘇惠玉在〈圓錐曲線的教學設計〉中，反思教材呈現與教學時學生容易產生疑問或錯誤之處，藉由史料的引入讓學生從幾何的角度對圓錐曲線有一個較全面的概念理解，以阿波羅尼斯命題中的正焦弦統整圓錐曲線的表徵，對課本的定義與概念賦與學習的動機與意義 (蘇惠玉，2004)。

這段期間臺灣的中學教師在 HPM 實踐概念與方法上開始轉變，從筆者與其他教師經驗的回顧可以發現，轉變的契機始於參與這些教育研究計畫與研討會。參與這些計畫的中學教師之間，形成一個 HPM 的研究社群，在此社群中提出問題、研究、討論，以及完成成果報告，無疑地對這些中學教師的 PCK 以及 HPM 實踐能力都有所提升。對 PCK 的察覺與反思，促使教師在將數學史引進教學時，非常注意其內容與教材單元、學生認知之配合。在這種情況下，數學教師從 HPM 出發，可以有機地結合了 HPM 與 PCK，對數學文本銓釋、教材內容與學生學習經驗的『統整』，則一個清晰可見的指標 (洪萬生，2005b)，這些指標見證於與對數相關的三篇文章之中。另一個促成轉變的因素為學習工作單 (worksheets) 的引用：

其設計通常圍繞著簡短的歷史選粹 (historical extracts)，伴隨著歷史背景的說明，再輔以了解數學知識內容的問題、所涉數學議題的討論、今昔解法或處理的比較，以及這些選粹中的題解 (solving problems) 或它們所引發的類似題解 (洪萬生，1999，p. 2)。

根據 Barbara Jaworski 的研究，「學習工作單」對於設計者 (教師) 而言是一種「反思的工具」(reflective tool)，而對於研究者來說，則是一種『分析的工具』(analytic tool) (Jaworski, 2001，引自洪萬生，2005b)。教師在進行 HPM 實踐時所用學習單設計時，必須思考該問甚麼樣的問題才能達到使用這張學習單的教學目標，並且能有較好的教學成效，因此目前學習單仍是臺灣 HPM 實踐的重要工具。然而如果學習單附上的數學史訊息通常過於龐大，對學生閱讀理解容易造成負擔，反而形成另一種障礙，如蘇俊鴻與蘇惠玉在前兩篇論文中設計引用的學習工作單，實施時難免得到如當時在蘇意雯博士論文《數學教師專業發展的一個面向：數學史融入數學教學之實作與研究》中，所呈現的學生心得一樣的反應：「數學史的內容太難了 (某些)，根本不能細說，也很難了解，歷史跟數學混在一起，變更複雜了 (蘇意雯，2004，引自林倉億，2012b，p. 6)」。

二、課程綱要的變革（2003—2014）

2003 年發布《國民中小學九年一貫課程（正式）綱要》取代問題叢生的 2000 年版的《九年一貫課程暫行綱要》時，除了改正《暫綱》在學生學習上因建構式學習產生的問題之外，在「基本理念」的陳述上也有很大的不同。《正綱》強調基於所述之理念，需要長期及多面向的關照，這些面向如素質指標、能力發展、教材教法、教師關懷、給家長的建議，以及數學史的重要性：

在教師教學裡，引進與主題相關的數學史題材，對學童的學習會有很正面的意義，尤其能協助學童將抽象觀念具體化。因為不論在科技應用層面或思想突破方面，數學重要概念的演進確有其實用面的考量，因此提供具啟發性的數學史方面的讀物實屬必要（教育部，2003，p. 22）。

2000 年公布的《暫綱》中並沒有出現與「數學史」相關的內容，然而在 2003 年的《正綱》中會強調數學史的重要，表示當時臺灣幾個團隊在數學史應用於數學教學上的努力與成效，已獲得某種程度的認可，這些團隊中當然包含了洪萬生領導的通訊團隊。事實上，除了臺灣之外，世界各國也都逐漸意識到數學史在數學教學上可以帶來的利基，譬如香港早在 1995 年的《中學課程綱要—數學科（中一至中五）》中正式提出要在數學教學過程中引入數學史：「數學史融入除了在教學上帶來種種益處之外，數學史對課程的編排肯定起着指導性的作用，這些課程編排包括整體的課程設計，也包括（微觀的）教程（例如教學單元）安排」（黃毅英，2007，p. 4），在通訊中刊登的幾篇文章，恰好做了最好的例證。

在九年一貫課程綱要公布之後，通訊上陸續刊登了幾篇在 HPM 實踐上跟九年一貫課程有關的文章，例如林肯輝的〈數學步道之實務經驗談—以羅東國中為例〉（林肯輝，2003），林肯輝的學校因應九年一貫課程發展學校特色，因此要求他設計數學步道，雖然從文章中可以發現步道內容與數學史無關，不過這篇文章啟發了一種新的想法，一種將數學史應用於中學數學的其他方式，同樣地，明德國中數學科團隊為建立學校特色創刊發行了《數食店月刊》，進而拿下課程教學領導組的學校經營創新獎（陳玉芬，2009a，2009b），也是另一種 HPM 實踐的可能方式。另外，九年一貫課程強調國小與國中階段課程的連貫學習，在這樣的基本理念之下，通訊團隊開始思考小學與中學數學課程的縱深與統整，洪萬生於 2004 年開始推行《中小學數學教師學科知識的縱深統整：以結合 HPM 的探究為進路》，其中幾篇成果亦刊登於通訊之中，譬如〈HPM 學習單模組設計「圓與圓周率」單元簡介〉（蘇俊鴻，2005）與〈三角形面積公式的縱深與統整〉（蘇惠玉，2006a）兩篇文章。然而縱深與統整的關懷並未就此中斷，還有後續的〈《高觀點下的初等數學》第一卷算術代數分析之評論〉（黃俊璋，2010）、〈高觀點、HPM 與拱心石課程〉（洪萬生，2012）以及〈高觀點看數學—生手教師指導科展的探究〉（林益弘，2013），這幾篇文章皆強調從高觀點檢視數學概念，「由於高觀點也涉及歷史的『洞識』，譬如在複數平面上重新詮釋

座標平面的問題之意義何在，因此，HPM 在這個關連中，終於有了堂而皇之的切入點」(洪萬生，2012，p. 9)。這些文章所描述的 HPM 實踐都與課程綱要的調整有關，也是課程綱要的改變所帶來的新的實踐形式。

除了國中小的課程綱要調整之外，為配合國中小的九年一貫課程綱要，高中部分在 2006 年實施過渡的《普通高級中學課程暫行綱要》之後，於 2010 年開始實施《普通高級中學課程綱要》(教育部，2008)。不管是 95 暫綱或 99 課綱，都為高中數學教師帶來一些新挑戰。因應新課程帶來教學上的問題或調整，身為高中數學教師的通訊作者群，開始一連串結合 HPM 的反思與新的實踐方式。首先於 2005 年先發行了〈『95 學年度高中數學暫行綱要』專輯〉，從教師 PCK 素養與 HPM 角度思考新課綱會產生的一些教學問題與建議；接著化整為零，從各單元或概念的「點」著手，串點為線，希望最後能聚集成完整的高中數學課程的 HPM 實踐方案，因此這個時期關於中學數學史素材的文章增多了，有些提及融入的實踐方法，如林倉億的〈數學史融入教學—以對數為例〉。除此之外，以蘇俊鴻參加思源科技基金會舉辦的「高中基礎科學優良教案甄選」獲得金牌獎的三篇教案為例，這三篇教案分別為有關餘弦定理、無理數與圓錐曲線的教學有關。他將數學史料恰當地融入單元教學活動中，作為概念理解、連結與統整的重要媒介，「利用幾何意義，連結了原本孤立的數學知識，從而發現數學知識本質上的共通性與差異」(黃俊璋，2012，p. 5)。圖 1 及圖 2 擷取至通訊文章中刊登的教案部分內容：



圖 1 蘇俊鴻老師的餘弦定理教案。引自「餘弦定理可以怎麼教」，蘇俊鴻，2006，HPM 通訊，9 (10)，6。

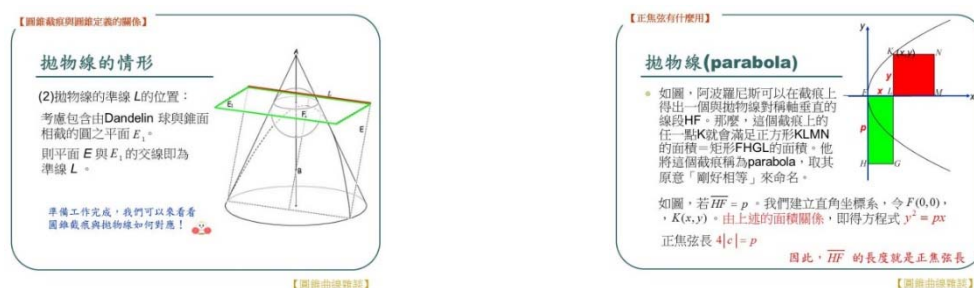


圖 2 蘇俊鴻的圓錐曲線教案。引自「〈圓錐曲線雜談〉教案分享」，蘇俊鴻，2012，HPM 通訊，15 (7)，3-4。

除了附有實踐方式的相關文章之外，此時以補充數學史相關背景為主的文章，也與初期有明顯的不同。除了題材更貼近中學課程之外，這些作者們結合自身的教學經驗來補足課程學習之不足，使得史料的呈現更貼近中學教師的教學需求。這種書寫形式所呈現的內容，恰足以提供給中學教師作為多元選修特色課程之材料，如〈牛頓插值多項式：拉格朗日怎麼說〉(林倉億，2012a)、〈馬可夫生平與馬可夫鏈〉(林倉億，2013)、〈Frans von Schooten 的圓錐曲線作圖器與電腦模擬〉(蘇惠玉，2013)、〈『轉移矩陣』二三事(I)、(II)、(III)〉(林倉億，2014a, 2014b, 2014c)、〈布里格斯的《對數算術》與對數表的製作〉(蘇惠玉，2014)、〈貝葉斯與貝氏定理〉(蘇俊鴻，2014)，以及前述的〈機率發展的第二樂章〉(蘇惠玉，2016)。因應高中新課綱的實施，以及作者們個人教學與 HPM 實踐經驗的累積，這類型文章才會在後期大量出現。

三、從閱讀理解到數學文化素養

透過閱讀理解與寫作訓練來培養學生的數學素養，一直是《HPM 通訊》中強調的一種數學學習方式，也因此通訊在 185 期的文章中，多次規劃科普或數普書籍專刊，總共介紹或評論了 130 本數學普及書籍。藉由閱讀數學家傳記或論及數學概念與數學史的書籍之後，進行討論或心得寫作，一直以來都是 HPM 實踐上的一種方法，同時早在 1999 年，林倉億在〈透過「寫作」促進數學學習〉這篇文章中，就已說明過將「寫作」作為數學學習手段的益處：「寫作對學生學習的幫助可以分成：發展數學知識、發展解題方法、發展自我監控與反思、促進情感表達以及促進討論」(林倉億，1999, p. 8)。以此作為 HPM 實踐的一種進路，陳敏皓於 2004 年亞太 HPM 中發表的〈從 HPM 角度談高中數學人才培育計畫〉，從 HPM 的角度出發，首重學生的數學科普閱讀能力，輔以加強學生的解題策略，從討論中學習數學知識內容，從閱讀數學史中獲得數學概念啟發(陳敏皓，2004)。

儘管九年一貫課程開始實施之後，教育部為協助學生學習，開始大力推行閱讀計畫(教育部，2014)，大約從 2008 年開始才看到數學教師在閱讀活動推行上的大鳴大放。《HPM 通訊》透過刊登的文章也為這些活動留下紀錄，譬如〈簡介國立蘭陽女中科學史深耕閱讀計畫〉(陳敏皓，2008)、〈如何指導國中生閱讀數學科普書籍〉(蘇進發、王諾涵，2009)、〈為國中學生推薦數學普及閱讀書單〉(洪萬生，2013a)、〈數學閱讀策略教學初探〉(陳玉芬，2018)；還有與閱讀有關的研討會相關訊息，如 2009 年舉辦的「數學普及書籍閱讀國際研討會」、2009 年舉辦的「基隆市國中數學教師優良數學科普讀物推薦工作坊」與 2010 年舉辦的「數學家傳記寫作坊」等等。從 2008 年開始的數普書籍閱讀與相關活動的增多，數學小說的興起扮演了很關鍵的角色。

2006 年通訊刊登了〈溫柔與感傷的數學真理—閱讀《博士熱愛的算式》〉(蘇惠玉，2006b) 這一篇文章，不久單維彰(2008)也發表〈記憶著愛情的數學等式〉，隨著這本書的熱銷，數學小說這一新興文類在國內逐漸引起關心數學教育者的重視，不過國外的一些學者早注意到數學

與敘事體 (narrative) 之間可類比的結構關係，譬如在湯瑪斯 (Thomas, R. S. D.) 的 “Mathematics and Narrative” 這篇論文中，關於數學 vs. 敘事的應用性與真實性，湯瑪斯注意到諸如數學物件與數學定理，都能如同故事般地被應用，這是因為數學物件及其彼此關係，正如同故事中的虛構人物或角色 (character) 一樣，都是被設定的，但是，進一步推演或發展出來的有意義關係，卻具有普適性的應用價值 (Thomas, 2002, 引自洪萬生、林芳玫, 2009)。在多夏狄斯 (Apostolos Doxiadis) 的論文 “The Mystery of the Black Knight’s Noetherian Ring” 中，他提出一個新想法：將敘事的形式應用在數學教育。他除了類比數學與敘事的相似性之外，更將波利亞 (G. Polya, 1887–1985) 在《如何解題 (How To Solve It)》中所提出的解題策略，逐條地對比到刑事偵辦的手法上 (Doxiadis, 2004)。

數學敘事的一個簡單易懂的代名詞就是數學小說。數學小說 (含電影、舞台劇、漫畫及繪本等) 是一個新興的文類 (genre)，它既是一種文學範疇中的小說，也可歸屬於數學普及書寫 (洪萬生, 2018)。洪萬生在與林芳玫合寫的〈數學與敘事在教育上的應用：以通識教育和 HPM 為例〉中，詳細地論述了數學小說應用在通識教育與 HPM 上的可行性，就 HPM 實踐而說，「如果故事編得生動有趣，那麼，融入這些敘事的數學概念之教學一定可以獲得 Hans Freudenthal 所主張的『引導式的再發現 / 再發明』(guided discovery / invention) 之成效」(洪萬生、林芳玫, 2009, p. 7)。洪萬生之後多次在通訊上發表文章，宣導如何將數學小說應用於學生的數學學習與教師的 HPM 實踐上。這一種實踐進路的改變，可見證於通訊近年來刊登的文章之中，關於閱讀與文化素養的文章，從 2008 年的 11 卷開始出現，到最新一期共 25 篇文章，同時介紹或評論了 18 本數學小說。除此之外，蘇惠玉也曾在〈推理敘事中的數學 — 作為數學與法治教育的例證〉中介紹過美國影集 CSI (Crime Scene Investigation) 與《數字搜查線 (numb3rs)》(蘇惠玉, 2010)；通訊團隊中的陳彥宏亦在《數理人文》中發表過有關日劇裡的數學元素〈日劇中的數學和美少女〉(陳彥宏, 2014)；以及洪萬生為臺灣大學開設的數學通識課程「數學與文化：以數學小說閱讀為進路」，臺灣大學將其製作為開放性課程，可在網路上檢索閱聽，這些都是中學教師在推廣利用數學小說做為數學學習媒介的重要資源庫。

這種利用數學小說為學習媒介的 HPM 實踐新進路之利基，洪萬生在〈萃取之必要：數學思維 vs. 寫作技巧〉這篇文章中更進一步作了說明。洪萬生認為藉由數學思維 vs. 寫作技術的反思，我們可以多少理解「萃取」在智力活動的許多面向，都具有深刻的價值與意義，當然這其中包括數學學習：

有了本文有關寫作技術 vs. 數學思維的對比之後，或許數學教師也可以從數學教學的脈絡切入，說明數學思維的鍛鍊誠然有其外部效果才是。如此一來，數學學習與語文閱讀可以連成一氣，而數學思維也就可以成為一般思維中的精華了 (洪萬生, 2013b, p. 3)。

在數學教學中融入數學史，固然是 HPM 的一種典型進路，不過，如果充分利用數學小說的數學敘事甚至是文學敘事的特色，那麼，其潛在的教學（或主動學習）成效，也可視為 HPM 的一種延伸（洪萬生，2018）。這種新的 HPM 實踐進路的改變，已經發生於臺灣的 HPM 實踐中，利用這種策略所設計的教學活動，在通訊最近刊登的文章亦可得到見證。譬如黃俊瑋在〈數學史與特色課程的邂逅〉、〈多元選修特色課程「沒有數學的數學課」—電影、閱讀與敘事〉這兩篇文章裡所介紹的特色課程。他在第一次開設的課程中，嘗試融入數學與歷史、數學與文化、數學與美學、數學與文學、數學普及讀物、數學電影等元素，他認為「相較起數學正課的『硬』，數學特色課程的『溫柔』與通識取向，更能引發學生的學習動機，並拉近學生們與數學之間的距離」（黃俊瑋，2015，p. 10）。他於 2017 年再次開設的特色課程中，以數學通識與數學素養為導向，融入數學史、數學文化、數學哲學、數學美學以及數學閱讀和數學寫作等元素作為課程核心，實際利用數學敘事的特性作為 HPM 實踐的策略，以引發學生對數學的興趣與學習動機（黃俊瑋，2018）。另外，蘇俊鴻老師在〈詩數列車—數學詩教學設計分享〉這篇文章中，以數學詩的創作與賞析為教學目標，透過跨領域合作將數學思維與數學素養的養成直接融入語文閱讀與寫作的課程之中（蘇俊鴻，2017），也讓我們見識到臺灣中學教師在 HPM 實踐結合數學學習上的創意，開創 HPM 實踐的另一種可能方式。

伍、結語

自從 1996 年 HPM 的概念與方法引入臺灣之後，透過《HPM 通訊》的發行，這 21 年來，臺灣 HPM 實踐伴隨著走過與見證了臺灣教育的各種變遷。在 798 篇的文章中，本文以關於對數的三篇文章說明 HPM 實踐時，滲透進入課程教學中的層次與深度，從一開始的說故事與補充知識備背景史料的表面層次，到擷取史料中的片段融入教學之中的深層應用，說明了臺灣這 20 年來推行結合教師 PCK 與 HPM 實踐上的努力與成效。隨著時間的流逝，臺灣 HPM 實踐的進路也不是一成不變的，它跟著教育環境的變遷而有了轉變，從典型的數學史融入教學，到現在加入數學敘事特性，以閱讀理解與寫作訓練作為 HPM 實踐的新進路。因應外在教育環境與文化氛圍的改變而演變的實踐方式，儼然已成為臺灣 HPM 實踐的一大特色。

臺灣的中小學教育即將在明年迎來新的課程綱要，在教育部發布的《十二年國民基本教育課程綱要：國民中小學暨普通型高級中等學校（數學領域）》（教育部，2018）中，再次看到了數學史的重要性。此次的課綱在基本理念中直接宣告「數學是一種人文素養，宜培養學生的文化美感」，其中更提到：

數學史能夠幫助我們理解數學發展在不同時期與不同文化的差異，更能協助教師釐清數學學習的主軸。所以適時地在數學教學之中融入適當的數學史內容，可以提升數學教學品質與學生的學習成效。認識數學的文化面向，不僅有助於讓數學學習從工具性層次延伸到智識性層次，也更彰顯數學知識的人文價值，達到「適性揚才」與「終身學習」的教育目標（教育部，2018，p. 1）。

劉柏宏曾引述東西方學者的論述，皆一致地指出文化在數學素養中的關鍵角色，有數學素養的人必須具備某種程度的數學文化內涵。劉柏宏認為所謂的數學文化包含兩種意涵：文化中的數學（*mathematics in culture*）與數學中的文化（*culture of mathematics*）。其中文化中的數學至少需考量幾個趨向：歷史的、社會的與民族的趨向（劉柏宏，2016）。將數學文化內涵包容進入數學素養的教學活動之中，亦如在第參節所論述的 HPM 實踐的層次：「從歷史的角度注入數學知識活動的文化意義，在數學教育過程中實踐多元文化關懷的理想」。雖然典型的 HPM 實踐進路，以及劉柏宏舉例說明的文化中的數學之論述，其範圍比較偏向數學史研究中所指涉的面向，不過如果不侷限在「歷史的文化」，此文化也泛指學生所處的當代文化，那麼以數學文化為底蘊的 HPM 實踐，透過數學閱讀與寫作的策略應用，就能有更加寬廣的空間可以盡情揮灑，也更能實踐 HPM 所強調的「多元文化關懷」。

從《HPM 通訊》上的文章分析，看到了臺灣在 HPM 實踐上的創意與實力，種種的創意與實力來自紮實的數學史訓練與自主研發的能力。當數學史融入數學教學的成效已毋庸置疑之際，臺灣的 HPM 實踐在典型的數學史融入教學進路上，應更加的契合教學活動，讓數學史材料成為單元教學的一部份，同時透過史料中與歷史、文化素養有關的問題設計，加強學生自主思考、反思的能力。另外，HPM 實踐的數學文化特色，更能在現今教育環境強調在閱讀理解、寫作表達、與自我學習能力中發揮所長，透過數普書籍與數學小說文類的閱讀與寫作，讓數學思維成為一般思維的精華，甚至透過數學文學與藝術的欣賞連結，更能激發學生學習數學、欣賞數學與應用數學的樂趣及能力。從過去看未來，臺灣 HPM 實踐在參與者的創意與實力發揮之下，將能在數學教育之中發揮更大的作用。

參考文獻

參考文獻前加註*者表示為文獻分析中所分析之文獻。

*李政憲（2010）。機率的大秘密。HPM 通訊，13（5），10-19。【Li, Cheng-Hsien (2010). The big secret of probability. *HPM TongXun*, 13(5), 10-19. (in Chinese)】

汪曉勤（2012）。HPM 的若干研究與展望。上海 HPM 通訊，1（1），1-10。【Wang, Xiao-Qin (2012). Researches on HPM: An overview. *Shanghai HPM Newsletter*, 1(1), 1-10. (in Chinese)】

- 林肯輝 (2003)。數學步道之實務經驗談－以羅東國中為例。 **HPM 通訊**，6 (11)，8-11。【Lin, Ken-Hui (2003). Practical experience of mathematics trail – Luodong junior high school as an example. *HPM TongXun*, 6(11), 8-11. (in Chinese)】
- 林倉億 (1999)。透過「寫作」促進數學學習。 **HPM 通訊**，2 (4)，8-10。【Lin, Tsang-Yi (1999). Promote mathematics learning through writing. *HPM TongXun*, 2(4), 8-10. (in Chinese)】
- *林倉億 (2010)。數學史融入教學－以對數表為例。 **HPM 通訊**，13 (12)，8-16。【Lin, Tsang-Yi (2010). Integrating history of mathematics into mathematics teaching - Taking table of logarithm as an example. *HPM TongXun*, 13(12), 8-16. (in Chinese)】
- 林倉億 (2012a)。牛頓插值多項式：拉格朗日怎麼說？。 **HPM 通訊**，15 (10)，1-7。【Lin, Tsang-Yi (2012a). Newton interpolating polynomial: How did Lagrange say?. *HPM TongXun*, 15(10), 1-7. (in Chinese)】
- 林倉億 (2012b)。高中數學的 HPM 相關資源。 **HPM 通訊**，15 (1)，1-13。【Lin, Tsang-Yi (2012b). HPM related resources in senior high school mathematics. *HPM TongXun*, 15(1), 1-13. (in Chinese)】
- 林倉億 (2013)。馬可夫生平與馬可夫鏈。 **HPM 通訊**，16 (1)，1-8。【Lin, Tsang-Yi (2013). The biography of A. A. Markov and Markov chain. *HPM TongXun*, 16(1), 1-8. (in Chinese)】
- 林倉億 (2014a)。轉移矩陣二三事(I)：高中課本中穩定狀態的求法。 **HPM 通訊**，17 (5)，1-7。【Lin, Tsang-Yi (2014a). Something about stochastic matrix (I): The method of seeking stable state in high school textbook. *HPM TongXun*, 17(5), 1-7. (in Chinese)】
- 林倉億 (2014b)。轉移矩陣二三事(II)：歷年高中課本中的穩定狀態。 **HPM 通訊**，17 (6)，1-10。【Lin, Tsang-Yi (2014b). Something about stochastic matrix (II): The stable state in high school textbook over the years. *HPM TongXun*, 17(6), 1-10. (in Chinese)】
- 林倉億 (2014c)。轉移矩陣二三事(III)：馬可夫鏈穩定狀態的判別。 **HPM 通訊**，17 (7)，1-11。【Lin, Tsang-Yi (2014c). Something about stochastic matrix (III): The distinguishment of stable state in Markov Chain. *HPM TongXun*, 17(7), 1-11. (in Chinese)】
- 林益弘 (2013)。高觀點看數學～生手教師指導科展的探究。 **HPM 通訊**，16 (6)，5-9。【Lin, I-Hung (2013). Mathematics from an advanced standpoint - A beginning teacher's guiding on the exploration of science exhibition. *HPM TongXun*, 16(6), 5-9. (in Chinese)】
- 洪萬生 (1991)。古代數學文本在課堂上的使用。國科會補助專題研究計畫 (NSC 89-2511-S-003-032; 89-2511-S-003-121)。臺北市：國立臺灣師範大學數學系。【Horng, Wann-Sheng (1991). *Achievement report for using ancient mathematical original sources in classroom*. Research project subsidized by National Science Council (NSC 89-2511-S-003-032; 89-2511-S-003-121). Taipei: Department of mathematics, National Taiwan Normal University. (in Chinese)】
- 洪萬生 (1998a)。發刊詞。 **HPM 通訊**，1 (1)，1。【Horng, Wann-Sheng (1998a). Statement of inaugural issue. *HPM TongXun*, 1(1), 1. (in Chinese)】
- 洪萬生 (1998b)。HPM 隨筆 (一)。 **HPM 通訊**，1 (2)，1-3。【Horng, Wann-Sheng (1998b). HPM essay (I). *HPM TongXun*, 1(2), 1-3. (in Chinese)】
- 洪萬生 (1999)。HPM 隨筆 (二)：數學史與數學的教與學。 **HPM 通訊**，2 (4)，1-3。【Horng, Wann-Sheng (1999). HPM essay (II): History of mathematics and teaching and learning of mathematics. *HPM TongXun*, 2(4), 1-3. (in Chinese)】

- 洪萬生 (2001)。「古代數學文本在課堂上的使用」研究心得。**HPM 通訊**, 4 (12), 1-6。【Horng, Wann-Sheng (2001b). Research experience of the project: Using ancient mathematical original sources in classroom. *HPM TongXun*, 4(12), 1-6. (in Chinese)】
- 洪萬生 (2002a)。中算史中的「張本例」。**HPM 通訊**, 5 (12), 1-3。【Horng, Wann-Sheng (2002a). Generic examples in Chinese history of mathematics. *HPM TongXun*, 5(12), 1-3. (in Chinese)】
- 洪萬生 (2002b)。數學文本的問題意識。**HPM 通訊**, 5 (1), 1-2。【Horng, Wann-Sheng (2002b). Problem awareness in mathematical original sources. *HPM TongXun*, 5(1), 1-2. (in Chinese)】
- 洪萬生 (2002c)。數學教師專業發展與 HPM。國科會補助專題研究計畫 (NSC 91-2521-S-003-006; 92-2521-S-003-002)。臺北市：國立臺灣師範大學數學系。【Horng, Wann-Sheng (2002c). *Mathematics teachers' professional development and HPM*. Research project subsidized by National Science Council (NSC 91-2521-S-003-006; 92-2521-S-003-002). Taipei: Department of mathematics, National Taiwan Normal University. (in Chinese)】
- 洪萬生 (2003)。從五十一期『索引』回溯本刊足跡。**HPM 通訊**, 6 (12), 1-2。【Horng, Wann-Sheng (2003). Backtrack the trace of this journal from the index of issue 51. *HPM TongXun*, 6(12), 1-2. (in Chinese)】
- 洪萬生 (2004)。中小學數學教師學科知識的縱深統整：以結合 HPM 的探究為進路。國科會補助專題研究計畫 (NSC93-2521-S003-015; NSC94-2521-S003-01)。臺北市：國立臺灣師範大學數學系。【Horng, Wann-Sheng (2004). *The vertical integration of subject knowledge of mathematics teachers in elementary and high schools: Taking the exploration of integrating HPM as an approach*. Research project subsidized by National Science Council (NSC93-2521-S003-015; NSC94-2521-S003-01). Taipei: Department of mathematics, National Taiwan Normal University. (in Chinese)】
- 洪萬生 (2005a)。如何萃取才有意義呢？。**HPM 通訊**, 8 (11), 1-2。【Horng, Wann-Sheng (2005a). How to extract meaningfully?. *HPM TongXun*, 8(11), 1-2. (in Chinese)】
- 洪萬生 (2005b, 7 月)。PCK vs. HPM：以兩位高中數學教師為例。專題演講發表於 2005 香港數學教育會議，香港教育大學。【Horng, Wann-Sheng (2005b, July). *PCK vs. HPM: Taking two high school mathematics teachers as an example*. Lecture presented at 2005 Hong Kong Mathematics Education Conference, The Education University of Hong Kong. (in Chinese)】
- 洪萬生 (2012)。高觀點、HPM 與拱心石課程。**HPM 通訊**, 15 (6), 1-10。【Horng, Wann-Sheng (2012). Advanced standpoint, HPM and capstone course. *HPM TongXun*, 15(6), 1-10. (in Chinese)】
- 洪萬生 (2013a)。為國中學生推薦數學普及閱讀書單。**HPM 通訊**, 16 (11), 11-12。【Horng, Wann-Sheng (2013a). Recommended reading list of popular mathematics books for junior high school students. *HPM TongXun*, 16(11), 11-12. (in Chinese)】
- 洪萬生 (2013b)。萃取之必要：數學思維 vs. 寫作技術。**HPM 通訊**, 16 (2/3), 1-4。【Horng, Wann-Sheng (2013b). Necessary for extraction: Mathematical thinking vs. writing skills. *HPM TongXun*, 16(2/3), 1-4. (in Chinese)】
- 洪萬生 (2018)。異軍突起的數學小說。**HPM 通訊**, 21 (6), 1-5。【Horng, Wann-Sheng (2018). A mathematical fiction with a new force emerged. *HPM TongXun*, 21(6), 1-5. (in Chinese)】
- 洪萬生、林芳玫 (2009)。數學與敘事在教育上的應用：以通識教育和 HPM 為例。**HPM 通訊**, 12 (11), 1-11。【Horng, Wann-Sheng, & Lin, Fang-Mei (2009). The application of mathematics and narrative in Education: Taking liberal education and HPM as an example. *HPM TongXun*,

12(11), 1-11. (in Chinese)】

*洪誌陽 (1999)。對數隨談。HPM 通訊, 2 (6), 10-12。【Hung, Chih-Yang (1999). Talking about logarithm. *HPM TongXun*, 2(6), 10-12. (in Chinese)】

張幼賢 (2007)。我國數學課程綱要近年的變革。教育部高中數學學科中心高中數學電子報, 21。取自 <http://mathcenter.ck.tp.edu.tw/Resources/ePaper/ePaperOpen.ashx?qs0=0&qs1=21> 【Chang, Yu-Hsien (2007). The change of mathematics curriculum guidelines over the years. *Ministry of Education Senior High School Mathematics Center Newsletter*, 21. Retrieved from <http://mathcenter.ck.tp.edu.tw/Resources/ePaper/ePaperOpen.ashx?qs0=0&qs1=21> (in Chinese)】

張益明、丁倩文 (2018)。HPM 視角下的「兩角和與差的餘弦公式」教學。上海 HPM 通訊, 7 (3), 28-36。【Zhang, Yi-Ming, & Ding, Qian-Wen (2018). The teaching of “the cosine formula of the addition and difference of two angles” from the perspective of HPM. *Shanghai HPM Newsletter*, 7(3), 28-36. (in Chinese)】

張復凱 (2004)。HPM 網站大公開：convergence。HPM 通訊, 7 (5), 18-19。【Chang, Fu-Kai (2004). Introduce the website about HPM: convergence. *HPM TongXun*, 7(5), 18-19. (in Chinese)】

教育部 (1998)。國民中小學九年一貫課程綱要。臺北：作者。取自 <https://cirn.moe.edu.tw/Guidline/index.aspx?sid=9> 【Taiwan Ministry of Education. (1998). *Grade 1-9 curriculum guidelines*. Taipei: Author. Retrieved from <https://cirn.moe.edu.tw/Guidline/index.aspx?sid=9> (in Chinese)】

教育部 (2008)。普通高級中學課程綱要。臺北：作者。取自 <https://www.naer.edu.tw/files/15-1000-2979,c551-1.php?Lang=zh-tw> 【Taiwan Ministry of Education. (2008). *General senior high school curriculum guidelines*. Taipei: Author. Retrieved from <https://www.naer.edu.tw/files/15-1000-2979,c551-1.php?Lang=zh-tw> (in Chinese)】

教育部 (2014)。第七次中華民國教育年鑑。臺北：作者。取自 <https://www.naer.edu.tw/files/15-1000-7986,c1311-1.php?Lang=zh-tw> 【Taiwan Ministry of Education. (2014). *The seventh educational yearbook of the Republic of China*. Taipei: Author. Retrieved from <https://www.naer.edu.tw/files/15-1000-7986,c1311-1.php?Lang=zh-tw> (in Chinese)】

教育部 (2018)。十二年國民基本教育課程綱要：國民中小學暨普通型高級中等學校(數學領域)。臺北：作者。取自 http://www.naer.edu.tw/ezfiles/0/1000/attach/49/pta_18524_6629744_60029.pdf 【Taiwan Ministry of Education. (2018). *Curriculum guidelines of 12-year basic education: Elementary and junior high school and general senior high school (Mathematics)*. Taipei: Author. Retrieved from http://www.naer.edu.tw/ezfiles/0/1000/attach/49/pta_18524_6629744_60029.pdf (in Chinese)】

陳玉芬 (2009a)。《數食店月刊》的緣起。HPM 通訊, 12 (4), 14-16。【Chen, Yu-Fen (2009a). The origin of *Shu Shi Dian Yue Kan*. *HPM TongXun*, 12(4), 14-16. (in Chinese)】

陳玉芬 (2009b)。參加「2009 年全國學校經營創新獎 -- 課程教學領導組」競賽感言。HPM 通訊, 12 (7/8), 15。【Chen, Yu-Fen (2009b). The comment on participating in the competition of InnoSchool Award 2009- Curriculum and teaching group. *HPM TongXun*, 12(7/8), 15. (in Chinese)】

陳玉芬 (2018)。數學閱讀策略教學初探。HPM 通訊, 21 (5), 1-8。【Chen, Yu-Fen (2018). A preliminary study of teaching mathematical reading strategy. *HPM TongXun*, 21(5), 1-8. (in Chinese)】

- 陳彥宏 (2014)。日劇中的數學和美少女。 *數理人文*, 2, 101-102。doi: 10.6851/MSHCM.201406_(2).0015 【Chen, Yen-Hung (2014). Mathematics and pretty girls in Japanese drama. *Humanities of Mathematical Sciences*, 2, 101-102. doi: 10.6851/MSHCM.201406_(2).0015 (in Chinese)】
- 陳敏皓 (2004)。從 HPM 角度談高中數學人才培育計畫。載於洪萬生、林炎全、甯自強與左台益 (主編), *歷史、文化與資訊時代的數學教育論文集* (209-216 頁)。臺中: 國立臺中師範學院。【Chen, Ming-Hao (2004). Senior high school talents cultivation project: An approach of HPM. In Wann-Sheng Horng, Yuan-Chyuan Lin, Tzyh-Chiang Ning, & Tai-Yih Tso (Eds.), *Proceedings of Asia-Pacific HPM 2004 conference: History, culture and mathematics education in the new technology era* (pp. 209-216). Taichung: National Taichung Teachers College. (in Chinese)】
- 陳敏皓 (2008)。簡介國立蘭陽女中科學史深耕閱讀計劃 (96 年度)。 *HPM 通訊*, 11 (4), 9-11。【Chen, Ming-Hao (2008). A brief introduction of the reading project ploughed on history of science (2007)】. *HPM TongXun*, 11(4), 9-11. (in Chinese)】
- 單維彰 (2008)。記憶著愛情的數學等式。檢自 http://mathmuseum.tw/wp-content/pdf/008_1230084044.pdf 【Shann, Wei-Chang (2008). *The mathematical equation of remembering love*. Retrieved from http://mathmuseum.tw/wp-content/pdf/008_1230084044.pdf (in Chinese)】
- 黃俊瑋 (2010)。《高觀點下的初等數學》第一卷算術代數分析之評論。 *HPM 通訊*, 13 (9), 4-10。【Huang, Jyun-Wei (2010). The comment on elementary mathematics from an advanced standpoint volume 1: Arithmetic, algebra and analysis. *HPM TongXun*, 13(9), 4-10. (in Chinese)】
- 黃俊瑋 (2012)。三份 HPM 教案反思與比較: 「圓錐曲線雜談」、「無理數」、「餘弦定理」。 *HPM 通訊*, 15 (5), 1-5。【Huang, Jyun-Wei (2012). The reflection and comparison between three HPM teaching plans: "A compilation of conics curve", "irrational number" and "law of cosine". *HPM TongXun*, 15(5), 1-5. (in Chinese)】
- 黃俊瑋 (2015)。數學史與特色課程的邂逅。 *HPM 通訊*, 18 (5), 1-10。【Huang, Jyun-Wei (2015). Distinctive course encounter with history of mathematics. *HPM TongXun*, 18(5), 1-10. (in Chinese)】
- 黃俊瑋 (2018)。多元選修特色課程「沒有數學的數學課—電影、閱讀與敘事」。 *HPM 通訊*, 21 (1/2/3), 8-15。【Huang, Jyun-Wei (2018). Multiple elective distinctive course "A mathematics class without mathematics- Movies, reading and narrative. *HPM TongXun*, 21(1/2/3), 8-15. (in Chinese)】
- 黃毅英 (2007)。從課程看回融入數學史。 *HPM 通訊*, 10 (2/3), 3-7。【Wong, Ngai-Ying (2007). A review of integrating the history of mathematics from the perspective of the curriculum. *HPM TongXun*, 10(2/3), 3-7. (in Chinese)】
- 劉柏宏 (2016)。從數學與文化的關係探討數學文化素養之內涵—理論與與案例分析。 *臺灣數學教育期刊*, 3 (1), 55-83。doi: 10.6278/tjme.20160413.001 【Liu, Po-Hung (2016). Discourse on the constituent of literacy for mathematical culture in terms of the relationship between mathematics and culture – Theoretical and case analysis. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, 3(1), 55-83. doi: 10.6278/tjme.20160413.001 (in Chinese)】
- 歐士福 (2003)。HPM 的發展史: 1976-2000 年。 *HPM 通訊*, 6 (10), 2-4。【Ou, Shih-Fu (2003). History of the development of HPM: 1976-2000. *HPM TongXun*, 6(10), 2-4. (in Chinese)】

- 蘇俊鴻 (2001)。不一樣的組合數。 **HPM 通訊**, 4 (4), 10-12。【Su, Jim-Hong (2001). The different combination number. *HPM TongXun*, 4(4), 10-12. (in Chinese)】
- *蘇俊鴻 (2003)。數學史融入教學—以對數為例。 **HPM 通訊**, 6 (2/3), 16-20。【Su, Jim-Hong (2003). Integrating history of mathematics – Taking logarithm as an example. *HPM TongXun*, 6(2/3), 16-20. (in Chinese)】
- 蘇俊鴻 (2004)。數學史融入數學教學：以數學歸納法為例。載於洪萬生、林炎全、甯自強與左台益 (主編), **歷史、文化與資訊時代的數學教育論文集** (155-166 頁)。臺中：國立臺中師範學院。【Su, Jim-Hong (2004). In Wann-Sheng Horng, Yuan-Chyuan Lin, Tzyh-Chiang Ning, & Tai-Yih Tso (Eds.), *The use of the history of mathematics in teaching and learning mathematics: The method of mathematical induction. Proceedings of Asia-Pacific HPM 2004 Conference: History, culture and mathematics education in the new technology era* (pp. 155-166). Taichung: National Taichung Teachers College. (in Chinese)】
- 蘇俊鴻 (2005)。HPM 學習單模組設計「圓與圓周率」單元簡介。 **HPM 通訊**, 8 (7/8), 4-6。【Su, Jim-Hong (2005). The design of HPM worksheet modules – Circle and pi. *HPM TongXun*, 8(7/8), 4-6. (in Chinese)】
- 蘇俊鴻 (2006)。餘弦定理可以怎麼教。 **HPM 通訊**, 9 (10), 4-6。【Su, Jim-Hong (2006). How to teach the law of cosine. *HPM TongXun*, 9(10), 4-6. (in Chinese)】
- 蘇俊鴻 (2012)。〈圓錐曲線雜談〉教案分享。 **HPM 通訊**, 15 (7), 1-4。【Su, Jim-Hong (2012). Sharing the teaching plan of “A compilation of conics curve”. *HPM TongXun*, 15(7), 1-4. (in Chinese)】
- 蘇俊鴻 (2014)。貝葉斯與貝氏定理。 **HPM 通訊**, 17 (9), 8-12。【Su, Jim-Hong (2014). Bayes and Bayes’ theorem. *HPM TongXun*, 17(9), 8-12. (in Chinese)】
- 蘇俊鴻 (2017)。詩數列車—數學詩教學設計分享。 **HPM 通訊**, 20 (5), 1-9。【Su, Jim-Hong (2017). Shi Shu Lie Che – Sharing the teaching design of mathematical poem. *HPM TongXun*, 20(5), 1-9. (in Chinese)】
- 蘇惠玉 (2001)。三角函數公式的托勒密方法。 **HPM 通訊**, 4 (5), 12-14。【Su, Hui-Yu (2001). The method of Ptolemy about the formula of trigonometric function. *HPM TongXun*, 4(5), 12-14. (in Chinese)】
- 蘇惠玉 (2004a)。曲線下面積學習單的設計。 **HPM 通訊**, 7 (5), 10-18。【Su, Hui-Yu (2004a). The worksheet design of area under the curve. *HPM TongXun*, 7(5), 10-18. (in Chinese)】
- 蘇惠玉 (2004b)。圓錐曲線的教學設計。載於洪萬生、林炎全、甯自強與左台益 (主編), **歷史、文化與資訊時代的數學教育論文集** (411-426 頁)。臺中：國立臺中師範學院。【Su, Hui-Yu (2004). A Teaching Design for Conics Sections. In Wann-Sheng Horng, Yuan-Chyuan Lin, Tzyh-Chiang Ning, & Tai-Yih Tso (Eds.), *Proceedings of Asia-Pacific HPM 2004 Conference: History, culture and mathematics education in the new technology era* (pp. 411-426). Taichung: National Taichung Teachers College. (in Chinese)】
- 蘇惠玉 (2006a)。三角形面積的縱深與統整。 **HPM 通訊**, 9 (4), 41-46。【Su, Hui-Yu (2006a). The vertical integration of triangle area. *HPM TongXun*, 9(4), 41-46. (in Chinese)】
- 蘇惠玉 (2006b)。溫柔與感傷的數學真理—閱讀《博士熱愛的算式》。 **HPM 通訊**, 9 (6), 19-20。【Su, Hui-Yu (2006b). Gentle and sentimental mathematical truth – Reading “The housekeeper and the professor”. *HPM TongXun*, 9(6), 19-20. (in Chinese)】

- 蘇惠玉 (2007)。圓錐曲線的腳本設計。 **HPM 通訊**, 10 (7/8), 14-17。【Su, Hui-Yu (2007). Script design of conics curve. *HPM TongXun*, 10(7/8), 14-17. (in Chinese)】
- 蘇惠玉 (2010)。推理敘事中的數學—作為數學與法治教育的例證。 **HPM 通訊**, 13 (4), 3-10。【Su, Hui-Yu (2010). Mathematics in mystery narrative – An illustration of mathematics and legal education. *HPM TongXun*, 13(4), 3-10. (in Chinese)】
- 蘇惠玉 (2013)。Frans van Schooten 的圓錐曲線作圖器與電腦模擬。 **HPM 通訊**, 16 (2/3), 5-9。【Su, Hui-Yu (2013). Frans van Schooten's plotters of conics curve and computer simulation. *HPM TongXun*, 16(2/3), 5-9. (in Chinese)】
- 蘇惠玉 (2014)。布里格斯的《對數算術》與對數表的製作。 **HPM 通訊**, 17 (6), 11-18。【Su, Hui-Yu (2014). Briggs' arithmetica logarithmica and the creation of logarithmic table. *HPM TongXun*, 17(6), 11-18. (in Chinese)】
- *蘇惠玉 (2016)。機率發展的第二樂章。 **HPM 通訊**, 19 (10), 1-8。【Su, Hui-Yu (2016). Second movement of the development of probability. *HPM TongXun*, 19(10), 1-8. (in Chinese)】
- 蘇進發、王諾涵 (2009)。如何指導國中生閱讀數學科普書籍。 **HPM 通訊**, 12 (3), 1-6。【Su, Chin-Fa & Wang, No-Han (2009). How to guide junior high school students to read popular mathematics books. *HPM TongXun*, 12(3), 1-6. (in Chinese)】
- *蘇意雯 (2000)。「古代數學文本在課堂上的使用」之教學報告—機率。 **HPM 通訊**, 3 (10), 2-7。【Su, Yi-Wen (2000). The teaching report of “using ancient mathematical original sources in classroom” – Probability. *HPM TongXun*, 3(10), 2-7. (in Chinese)】
- *蘇慧珍 (2003)。「數學期望值」學習工作單。 **HPM 通訊**, 6 (8/9), 2-11。【Su, Hui-Chen (2003). Worksheets for mathematical expectation. *HPM TongXun*, 6(8/9), 2-11. (in Chinese)】
- Doxiadis, A. (2004). *The mystery of the black knight's Noetherian ring: An investigation into the story-mathematics connection with a small detour through chess country*. Retrieved from <https://apostolosdoxiadis.com/wp-content/uploads/2008/05/the-mystery-of-the-black-knight-SITE-EDITION.pdf>

蔡文榮、張鈞淇、劉柏宏（2019）。

臺灣學術界數學史研究之現況分析與建議：以 1992 年至 2017 年學位論文為例。

臺灣數學教育期刊，6（1），27-51。

doi: 10.6278/tjme.201904_6(1).003

臺灣學術界數學史研究之現況分析與建議： 以 1992 年至 2017 年學位論文為例

蔡文榮¹ 張鈞淇¹ 劉柏宏²

¹ 國立中興大學教師專業發展研究所

² 國立勤益科技大學基礎通識教育中心

本研究旨在探討目前臺灣學術界關於數學史研究、數學史融入教學的現況、發展趨勢及對數學史教學研究的啟示。本研究係以內容分析法進行，針對 1992 年至 2017 年間 143 篇碩博士學位論文，從論文數量變化趨勢、研究主題、研究方法及數學史融入教學的單元等角度切入。結果顯示，純數學史的研究中，以探討中國古代數學的篇數過半為最多，而歐洲國家數學史最少。亞洲區域除了中國外，也對朝鮮及日本等地區的數學史進行相關研究。以教育階段區分，數學史融入教學的研究數量以國小與國中階段最多，高中次之，高職最少。不過數學史融入教學的單元佔比卻呈現相反趨勢。在研究方法方面，以質性研究的比例最高，除了行動研究與準實驗研究外，問卷和訪談是最主要的研究工具。本研究也針對未來數學史融入教學的方向提出一些建議。

關鍵詞：HPM、數學史、數學教育、學位論文

通訊作者：劉柏宏，e-mail：liuph@ncut.edu.tw

收稿：2018 年 8 月 30 日；

接受刊登：2019 年 3 月 21 日。

Tsay, W. R., Chang, C. C., & Liu, P. H. (2019).

Analysis of current state and recommendations for HPM research in Taiwan: The case of theses and dissertations from 1992 to 2017.

Taiwan Journal of Mathematics Education, 6(1), 27-51.

doi: 10.6278/tjme.201904_6(1).003

Analysis of Current State and Recommendations for HPM Research in Taiwan: The Case of Theses and Dissertations from 1992 to 2017

Wen-Rong Tsay¹ Chun-Chi Chang¹ Po-Hung Liu²

¹ Institute of Professional Development for Educators, National Chung Hsin University

² Fundamental Education Center, National Chin-Yi University of Technology

The purpose of this study was to investigate the current state, trend, and revelation of Taiwan's theses and dissertations in the field of HPM. This study adopted content analysis approach. By investigating 143 theses and dissertations ranging from 1992 to 2017, the study conducted a holistic analysis in terms of the trend in the change of quantity, research topics, methodologies, and HPM-integrated lessons. The result reveals that, regarding the study of ancient mathematics, over one half of the studies focused on Chinese context, while Europe context attracted the least attention. Beside of the ancient Chinese mathematics, Korean and Japanese mathematics were also investigated. As of the HPM-integrated lessons, the elementary and junior high school levels have the highest percentage followed by the high school level, and senior vocational school received the least attention. However, the ratio of the HPM-integrated lessons to the textbook lessons appears an opposite trend. Qualitative studies outnumbered the quantitative ones in these theses and dissertations. Beside of action research and quasi-experimental studies, questionnaires and interviews are the main instruments. The present study recommends several issues for future HPM researches.

Keywords: HPM, history of mathematics, mathematics education, degree thesis

Corresponding author : Po-Hung Liu · e-mail : liuph@ncut.edu.tw

Received : 30 August 2018;

Accepted : 21 March 2019.

壹、前言

一、研究背景

以數學教育研究的發展而言，數學史融入教學這一學術領域的崛起算是比較晚的，一般認為是從 1972 年在英國愛塞特 (Exeter, UK) 所舉辦的第 2 屆國際數學教育會議 (International Congress on Mathematical Education, ICME-2) 發軔，創立了「數學史與教學關係國際研究群」 (International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics, HPM)，當時是由國際數學教學委員會 (International Commission on Mathematical Instruction, ICMI) 所召開，1980 年之後該會創辦了數學史方面的通訊，並每四年定期舉辦一次會議 (Fasanelli & Fauvel, 2006)，該會最近一次是 2016 年在法國的 Montpellier 舉行。

臺灣師範大學洪萬生於 1996 年開始參與此一國際盛事，為積蓄籌備 2000 年在臺北所舉辦 HPM 研討會的學術能量，從 1998 年開辦《HPM 通訊》。因此，臺灣的 HPM 研究可以說是從 1990 年代正式與國際學界接軌，並將國外數學史的理念與作法引入國內 (洪萬生, 1998, 2001)。

因此之故，1990 年代以後，臺灣數學教育界逐漸重視「數學史」及「數學史融入中小學的數學教學」的研究，甚至成立專門研究的小組，全臺許多學校的學者與研究人員陸續發表有關這方面的學位論文、期刊論文、會議論文等著作，截至 2017 年底，已有至少一百多篇的學位論文，可謂代代薪傳，枝繁葉茂，學術成果纍纍如貫珠。因此，在這豐碩的立足點上，對於臺灣歷年來各校產出的數學史研究、數學史融入教學的學位論文進行宏觀性的回顧，在時機上可謂相當合宜。

二、研究動機

臺灣學生數學學習成就與素養在各項國際評比中 (例如 TIMSS 與 PISA) 雖然高居前五名，但學習動機卻始終列於後段班，而數學史正是激發並培養數學學習動機的重要因素之一，這是本研究欲探究臺灣這二十多年來數學史融入教學之發展與現況的第一個研究動機。

根據經濟合作暨發展組織 (The Organization for Economic Cooperation and Development, 簡稱 OECD) 在巴黎所發表的國際學生評量 (Program for International Student Assessment, 簡稱 PISA) 的成績來看，臺灣在 2006 年第一次參加時數學排名是第一名，2009 年降到第五名，之後的 2012 年升到第四名，排名上落後上海、新加坡、香港這三個地區，2015 年維持第四名。特別值得注意的是臺灣學生兩極化現象嚴重，數學素養高成就學生比例下降，尤其數學素養高成就層級 6 (共 6 層級) 的比例減半最為嚴重 (從 2012 年 18% 降至 10.1%)。而若從國際教育成就調查委員會 (The International Association for the Evaluation of Educational Achievement, 簡稱 IEA) 的公

布來看，在 2015 年「國際數學與科學教育成就趨勢調查」(Trend in Mathematics and Science Study 2015, 簡稱 TIMSS 2015) 的結果中，在全球近 50 個國家，臺灣四年級學生數學成就分別排名第 4 名；八年級學生在全球 39 個國家中，數學排名為第 3 名，與上一次排名持平。雖然我國中小學生數理成就名列前茅，但是學生對於學習數理的興趣和自信心卻明顯不足(楊騰凱，2016)。值得再次強調的是，數學史、數學學習動機、數學學習成就三者之間是有相關的，對於研究「數學史」、「數學史融入教學」的學術界而言，這應該是相當令人感興趣的研究方向，所以，瞭解過去二十多年關於這二個方向的學位論文自有其學術上的重要性。

其次，當今的十二年國教強調素養導向教學，西方學者認為數學素養必須考慮到情意與態度面向(Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001)。而從教育現場實務工作者的角度來看，「數學史」和「數學史融入教學」對於學生在數學的情意與態度上的素養之培養當有其不容忽視的影響，故而，對這二十多年來臺灣的學位論文在數學史這一主題上的各種面向加以深入瞭解，正呼應了時代的脈動，而成了第二個研究動機。

進而言之，西方的 Kilpatrick 等人(2001)從分析學校數學、閱讀認知心理學與數學教育文獻、以及對於現代社會所需的數學知識與技能的判斷，界定出學生在數學學習上所需的素養。有數學素養的學生能處理日常生活中的數學挑戰，並能在高中或大學階段學好數學。他們以交織在一起的五股線繩做為比喻，說明構成數學素養的五項主要能力，包括：(一) 概念的理解 (conceptual understanding)：對於數學概念、運算和關係的瞭解；(二) 程序的流暢 (procedural fluency)：能夠有彈性地、準確地、有效率地、合適地執行程序的技能；(三) 策略的能力 (strategic competence)：有能力去形成、表徵與解決數學問題；(四) 合宜的推論 (adaptive reasoning)：能夠進行邏輯思考、反思、解釋與驗證；(五) 建設性傾向 (productive disposition)：將數學視為有意義的、有用的、有價值的，相信努力學習數學會獲致成功，並且對於自己學好數學具有信心。這五項能力對於學生的數學學習彼此關聯，不可能只發展其中的一、兩項就能培養下一代的數學素養。值得注意的是，除了上述的認知與內容之外，他們所提出的數學素養還要考慮到情意與態度面向，成為五項能力中的一項。

而國內的李國偉、黃文璋、楊德清與劉柏宏(2013)綜合國內外文獻，定義數學素養的內涵如下：

個人的數學能力與態度，使其在學習、生活、與職業生涯的情境脈絡中面臨問題時，能辨識問題與數學的關聯，從而根據數學知識、運用數學技能、並藉由適當工具與資訊，去描述、模擬、解釋與預測各種現象，發揮數學思維方式的特長，做出理性反思與判斷，並在解決問題的歷程中，能有效地與他人溝通觀點。(p. 19)

上述的定義呼應了十二年國教總綱核心素養「自主行動」面向中的「身心素質與自我精進」、「系統思考與解決問題」、「規劃執行與創新應變」三項。並且，該定義除了強調活用基本數學知識來解決問題之外，也提出使用工具與資訊的重要性，這呼應「溝通互動」面向中的「符號運用與溝通表達」、「科技資訊與媒體素養」項目。李國偉等人（2013）建議融入數學文化的相關素材，不僅讓學童認知到數學對於人類歷史的貢獻，也能欣賞數學的美與和諧性，這呼應了「溝通互動」面向中「藝術涵養與美感素養」項目。該定義強調培養能理性反思、做出合理判斷，並能有效與他人或群體溝通觀點公民的重要性，具體呼應「社會參與」面向之核心素養。

所以，不管是西方的 Kilpatrick 等人（2001）的觀點，或是國內李國偉等人（2013）建議融入數學文化的相關素材，以呼應十二年國教素養導向教學所需，都無法迴避「數學史」、「數學史融入教學」的學術領域。因此，本研究依此脈絡來分析這二十多年來在數學史這一主題上的學位論文，當能對臺灣的數學教育界有所貢獻。

三、研究目的

根據上述研究背景與動機，本研究之研究目的如下所述：

- （一）根據數學史與數學史融入教學的學位論文以探討臺灣 HPM 的研究現況。
- （二）參酌 HPM 研究趨勢以提出對臺灣 HPM 研究的建議。

貳、文獻探討

一、數學史與 HPM 的意涵

數學史不僅追溯數學內容、思想和方法的演變、發展過程，而且還探索影響數學知識發展過程的各種內在與外在因素，以及歷史上數學科學的進展對人類文明所帶來的影響。因此，數學史研究對象不僅包括具體的數學內容，還包含歷史、哲學、文化、宗教等社會科學與人文科學內容，是一門綜合性學科。從數學知識發展中，個體與歷史過程的交互研究，我們可以獲得許多益處。對過去數學家所曾遭受過的阻礙之研究，幫助我們理解今日學生所犯的錯誤；反過來，研究學生的錯誤、困難與不當的概念，則可以和數學概念發展歷程相互映證（Nesher & Kilpatrick, 1990, p. 16）。

HPM 的動機完全是出於對於數學教與學的強烈關懷，其主要目的是要把數學「教好」或「學好」，而不是讓教師或學生去直接去教或學「數學史」（洪萬生，2004）。簡單地說，它是數學史學對數學教育的一種應用，目的當然是利用數學史的研究成果、以及數學史與數學教育的互動，來提升數學教師的教學品質與學生的學習成效。

二、數學史融入教學的意涵

洪萬生（1999）曾與西方學者討論出在數學史融入教與學的架構，如圖 1：

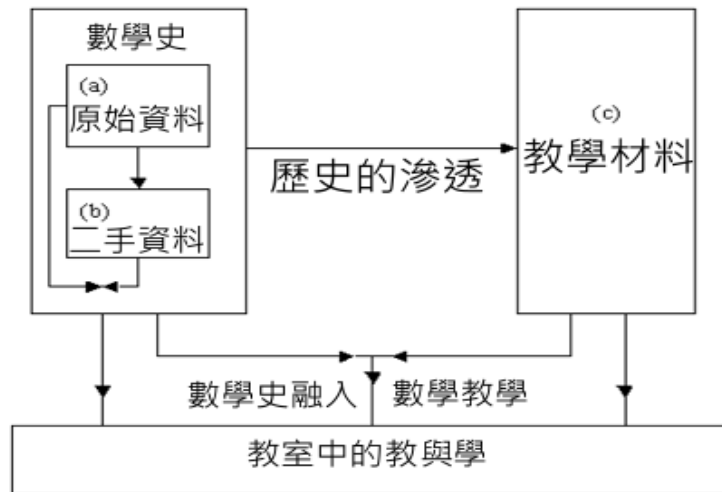


圖 1 數學史融入教室中的教與學之架構。引自「HPM 隨筆（二）：數學史與數學的教與學」，洪萬生，1999，*HPM 通訊*，2（4），2。

在圖 1 中，主體是最底層的「教室中的教與學」，所有的支架或成分都是為這主體服務。至於（a）原始資料支架和（b）二手資料支架，則是數學史學範圍的工作，而（c）項這個支架，則是我們平常所熟悉的教學材料（*didactic source materials*），只不過它已經受到數學史的啟發而被「滲透」了（*presentation inspired by history*）。這兩個支架的實質內容以及它們的結合會一起匯入底層，共同撐起「教與學」的主體。

洪萬生（1999）共列舉出 13 種可以將數學史融入教學的具體措施，包括從「引入如數學家的逸聞軼事、數學問題的起源之歷史花絮」的基本入門開始，進而「套用歷史上的數學問題（如古希臘三大作圖題）」與「恰當地使用歷史上出現的謬誤、另類概念、觀點的改變、隱含假設的修訂、直觀論證等」的中階作法，一直到「讓學生執行以歷史文獻為本的研究專案」的高階策略，這些都呼應洪萬生（2004）所呼籲，教師運用數學史至少可以分成三個層次：

- （一）說故事，對學生的人格成長會有啟發作用；
- （二）在歷史的脈絡中比較數學家所提供的不同方法，拓寬學生的視野，培養全方位的認知能力與思考彈性；
- （三）從歷史的角度注入數學知識活動的文化意義，在數學教育過程中實踐多元文化關懷的理想。

而 Furinghetti 與 Paola (2003) 則指出，在課堂上融入數學史可能達到的兩個取向：

(一) 歷史主要功能在於激發學生在數學上的興趣，此處的歷史包含了問題的出處、軼事和插圖的出處、趣聞的來源等；

(二) 整合歷史進入數學教學，就是以數學為主體，安排實踐的課程，探討教育的議題、數學的脈絡，從一個新的觀點以及佈置一個新的工作環境，以幫助達成數學的目標。

這兩個取向對臺灣中小學的教師在數學史融入教學領域有了相當的啟示與幫助，例如林炎全 (2006) 就認為可以從數學史與生活現實中來找出相關的事例，將之編入數學教材中，這在引發學生對數學的學習動機與認識數學的重要性上，應該是很具體的作法。不只臺灣的學者如此，中國湖北的華中師範大學教育學院張俊忠 (2015) 也認為數學史融入初中數學教育，可以促進形成科學的數學觀、激發學生學習數學的興趣、挖掘數學思想和數學方法、拓展數學眼界和開發數學思維、提高教師的數學素養、啟發學生的人格成長、樹立學生的自信心等。上述的論述其實就是在印證，不管是東方還是西方，數學史的重要性已經得到相當的認同。此外，Fauvel 與 Van Maanen (1997) 也提出了數學史融入數學教學時，同時要關注「數學的教與學的關係」、「數學史教師的訓練」兩大類的研究問題。例如，數學史實施上的角色如何因不同教育階段的學生而異？亦即使用數學史的方式與理論要考慮在不同的階段有其獨特的作法，小學生和大學各有不同的需求和可能性，該如何設計不同的數學史之實施方式？還有，數學史這一科目對數學老師有何特殊功能？亦即在職前培訓與在職進修上，數學史對老師要扮演重要角色，讓數學史成為數學老師的基本構成素養。

從上述的理論架構、實施方式和欲達成的數學目標，還有「數學的教與學的關係」與「數學史教師的訓練」兩大類的研究問題的論述來看，未來在國內進行數學史方面的學位論文時，本研究或許可以提供許多的參考。

參、研究方法

一、研究架構

本研究乃是針對以「數學史」與「數學史融入教學」為研究主題的學位論文進行研究現況及研究成果之分析。根據研究目的，本研究的研究架構如圖 2 所示。本研究採內容分析法，以臺灣碩博士學位論文為研究範疇，輔以相關文獻為基礎，建立各項分類表，包括研究方法分類表、研究主題分類表、及數學史教材編制分類表，以進行學位論文內容分類，最後再進行統計分析，以探討臺灣數學史相關研究的現況與發展。

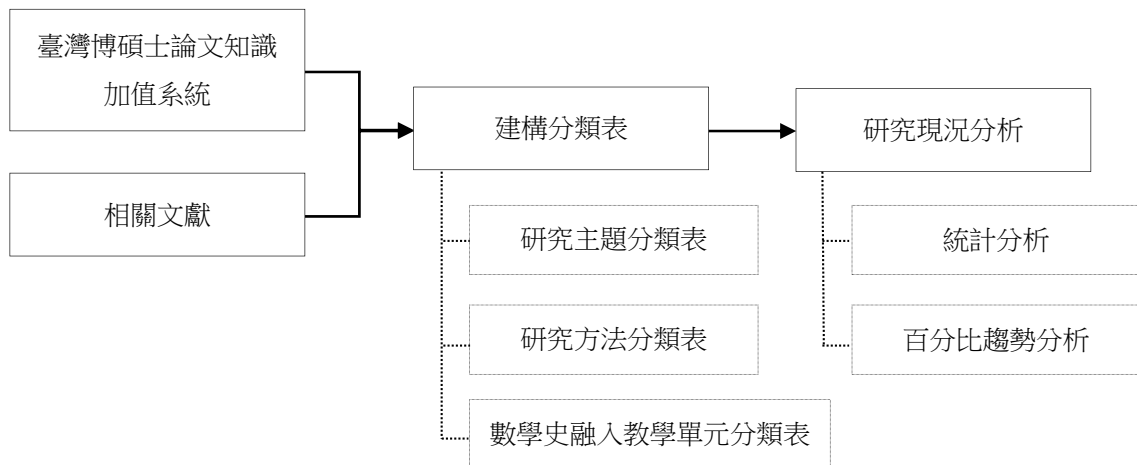


圖 2 研究架構圖

二、研究對象

本研究根據臺灣博碩士論文知識加值網站之資料庫中，搜尋從 1992 年至 2017 年間，關鍵字中含有「數學史」與「數學教育」之學位論文，結果共查得 143 篇。本研究之研究對象為臺灣地區之博碩士學位論文，故以「整篇論文」為分析單位。

三、研究工具

本研究以內容分析層面表為研究工具，依據內容分析之程序，先界定分析單位，進一步建構層面分析表。本研究旨在分析臺灣數學史的研究現況、研究結果與發展趨勢。根據研究目的，建立以下四個分析層面：研究數量、研究主題、研究方法以及數學史融入教學單元，並建構了三個分類表：研究主題分類表、研究方法分類表以及數學史融入教學單元分類表，依序說明如下：

(一) 研究主題

根據學位論文的研究焦點，將研究主題歸納為五大類：數學家與著作、數學史發展、融入教學、教材分析與編製、以及其他，詳細歸納方法如表 1。

表 1

研究主題之定義與歸納說明

研究主題	內容分類	定義與歸納說明
數學家與著作	中國	歷史人物研究、歷史作品研究。「跨文化」或稱「中國（譯本）」或「他國（譯本）」，是指外國數學文本的中文翻譯版本，例：明清時代所譯的《幾何原本》(王添法，1992)。
	跨文化	
	歐洲	
	日本	
	朝鮮	
數學史發展	中國	年代史研究、數學專題史研究
	朝鮮	
	日本	
融入教學	國小	各學習階段數學史融入教學研究
	國中	
	高中	
	高職	
教材分析與編製		教科書分析、HPM 教材編製
其他		其他研究主題

備註：研究者自行整理。

「數學家與著作」主題之定義為歷史人物研究、歷史作品研究，其中「跨文化」或可稱「中國（譯本）」或「他國（譯本）」，指外國數學文本的中文翻譯版本，例：明清時代所譯的《幾何原本》(王添法，1992)；「數學史發展」主題之定義為年代史研究、數學專題史研究；「融入教學」主題之定義為各學習階段數學史融入教學的研究。

(二) 「研究方法」類別定義與歸納

社會科學的研究方法眾多，在此針對本研究的研究對象所使用之研究方法，加以分門別類，包含實驗研究法、問卷調查法、訪談調查法、內容分析法、行動研究法及個案研究法等六項。

(三) 數學史融入教學單元

由於數學單元名稱會因年代以及教科書版本的不同而有所差異，本研究選擇以翰林版教科書的單元名稱為準，因為它同時出版國小、國中及高中三個教育階段的教科書。

肆、研究結果與討論

一、研究數量分析

(一) 研究數量趨勢分析

本研究分析之學位論文總數量為 143 篇，其年代統計結果如表 2，由表 2 可知最高一年有 21 篇（2003 年），最低時全年 HPM 學位論文數為零（1999 年和 2000 年），平均為每年 5.5 篇。

表 2

歷年來數學史相關學位論文數

年代(年)	篇數(篇)	百分比(%)	年代(年)	篇數(篇)	百分比(%)
1992	2	1.40	2005	5	3.50
1993	2	1.40	2006	6	4.20
1994	2	1.40	2007	10	6.99
1995	2	1.40	2008	1	0.70
1996	2	1.40	2009	18	12.59
1997	2	1.40	2010	3	2.10
1998	2	1.40	2011	10	6.99
1999	0	0.00	2012	6	4.20
2000	0	0.00	2013	8	5.59
2001	1	0.70	2014	7	4.90
2002	14	9.79	2015	2	1.40
2003	21	14.69	2016	5	3.50
2004	6	4.20	2017	6	4.20

根據表 2，本研究繪製各年段變化折線圖如圖 3 所示：



圖 3 各年數學史相關學位論文數變化

由圖 3 可以觀察到，1992 年到 1998 年七年之間，論文數量都維持在每年 2 篇，在 1999 年到 2001 年下滑至 0 到 1 篇，2002 年論文數量大幅增加，2003 年達到高峰 21 篇，而後 2004 年到 2007 年四年之間論文數量有平穩上升的趨勢，但 2008 年下降至只有 1 篇，而隔年 2009 年再次大幅增加至 18 篇。2010 年之後到 2017 年的數量雖有起伏，但平均每年都有 5 篇以上的研究數量。

在 1992 年至 1998 年這 7 年間，「數學史」與「數學史融入教學」相關研究的學位論文，都是由洪萬生所指導。1998 年 10 月 5 日《HPM 通訊》創刊後，HPM 領域開始蓬勃發展，除了洪萬生外，開始有其他教授指導數學史相關研究的學位論文。洪萬生在 2002 年到 2005 年間，執行「數學教師專業發展與 HPM」與「中小學數學教師學科知識的縱深統整：以結合 HPM 的探究為進路」等科技部專題研究計畫，有了科技部的支持，與其他 HPM 研究者的共襄盛舉，使得數學史相關研究的學位論文數量在 2003 年達到前所未有的高峰。2009 年數學史相關研究學位論文數量為 18 篇，是數量第二高的一年。進一步探究發現，有 10 篇是蘇意雯所指導，將數學史融入教學進行系統性的研究。

（二）指導教授指導論文數分析

從數學史相關學位論文數量依年代分析中發現，論文數與指導教授有相關性，因此進一步分析指導教授的指導論文篇數，表 3 為指導篇數在 2 篇以上的指導教授指導論文數統計表。

表 3

數學史領域學位論文之指導教授及其指導篇數之統計

指導教授	篇數（篇）	備註
洪萬生	88	含共同指導 21 篇
蘇意雯	23	
左台益	15	皆與洪萬生共同指導
左太政	9	
林英哲	4	
陳創義	4	皆與洪萬生共同指導
蕭龍生	4	
林炎全	2	
邱守榕	2	
蔡蓉青	2	皆與洪萬生共同指導

備註：研究者自行整理，以上不含只有指導 1 篇學位論文之教授名單。

從由 3 可知，指導數學史相關研究學位論文的教授中，以洪萬生的 88 篇為最多，其中有 21 篇是與他人共同指導；其次為蘇意雯，有 23 篇；左台益有 15 篇，但都是與洪萬生共同指導；左太政指導 9 篇。

二、研究主題分析

表 4 為 1992 年至 2017 年之間，臺灣數學史相關學位論文研究主題之描述統計，由表 4 可知研究主題以數學家與著作佔最多數，共 72 篇（50.35%），其次是融入教學類 49 篇（34.27%），而其他類最少有 6 篇（4.20%）。

表 4

數學史領域研究主題之統計

研究主題	內容分類	篇數	佔該研究主題百分比	合計
		(篇)	(%)	
數學家與著作	中國	34	47.22	72 (50.35%)
	跨文化	5	6.94	
	歐洲	3	4.17	
	日本	11	16.67	
	朝鮮	19	25.00	
數學史發展	中國	6	66.67	9 (6.29%)
	朝鮮	2	22.22	
	日本	1	11.11	
融入教學	國小	19	38.78	49 (34.27%)
	國中	18	36.73	
	高中	9	18.37	
	高職	3	6.12	
教材分析與編製		7		7 (4.90%)
其他		6		6 (4.20%)

根據表 4，繪製圓形圖如圖 4：

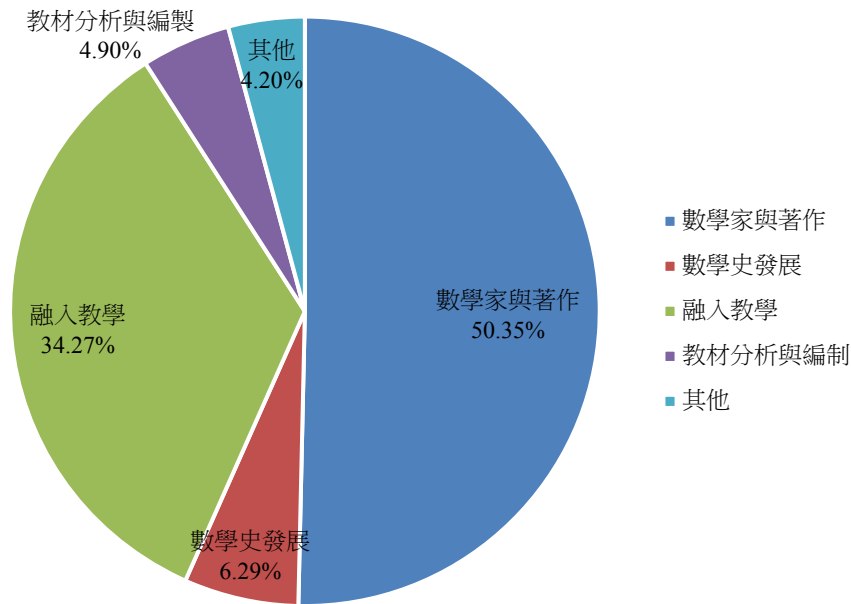


圖 4 數學史領域研究主題之分佈

由圖 4 可知，數學家與著作、數學史發展這兩個純數學史研究的類別合佔的比例過半，融入教學、教材分析與編製這兩個屬於教學應用研究的類別佔第二大類，兩大主題的詳細分析如下：

(一) 純數學史研究

本研究將數學家與著作、數學史發展這兩個類別，歸類於純數學史研究。純數學史研究大多都由洪萬生所指導，或是與左台益共同指導。觀察其研究歷程，發現早期研究以中國為主要研究國家，2002 年開始有朝鮮算學研究的學位論文，而直至 2011 年才開始有日本數學史相關研究的學位論文。如表 5 所示，其中數量最多的是中國數學史有 45 篇（55.56%），其次為朝鮮有 21 篇（25.93%），日本有 12 篇（14.81%），研究歐洲國家的數量最少，只有 3 篇（3.70%）。

表 5

純數學史研究國家統計

研究國家	篇數	百分比 (%)
中國	45	55.56
朝鮮	21	25.93
日本	12	14.81
歐洲國家	3	3.70

由表 5 可清楚的觀察到，研究中國的篇數過半領先，而歐洲國家最少，探究其原因可能為語言的限制。純數學史的研究主要以文本的內容分析為主，中國古代的數學文本雖然是文言文，但仍可以閱讀理解，因此研究中國數學史的數量最多，而研究歐洲國家的古代數學文本所需的外語能力，是研究的一大門檻，因此歐洲國家數學史的研究數量最少。

亞洲區域除了中國的研究數量佔了大多數，朝鮮及日本的研究數量合計也有 33 篇，佔純數學史研究的 40.73%。究其原因為朝鮮及日本的古代數學文本係使用漢字書寫，雖然會有文字表達上的歧異，但經研究者參考相關資料、辭典、文獻，加以研究與推測後，仍能理解古文書寫的數學意涵，因此朝鮮與日本的數學史研究有其發展潛力。

(二) 教學應用研究

融入教學、教材分析與編製這兩個類別，研究者將之歸類為教學應用研究，除洪萬生與左台益共同指導之外，其中大部分為左太政、蘇意雯兩位所指導，為 HPM 的教學應用開發了各教育階段的教材與教學模式，致力於推廣 HPM 在教學現場的實作。

根據表 4 數據，繪製之長條圖如圖 5：

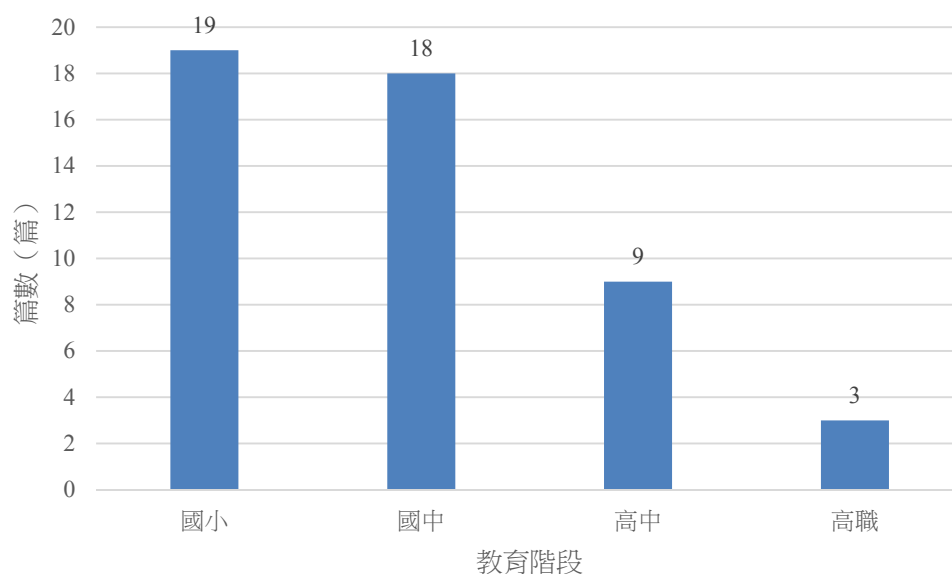


圖 5 數學史融入教學教育階段統計

由圖 5 可知，數學史融入教學的研究以國小與國中階段的數量最多，高中其次，高職最少。探究其原因，除了與現職中小學教師紛紛選擇進入各師範大學與教育院校的研究所進修有關外，蘇意雯指導多篇數學史融入小學教學也是關鍵因素。至於高中與高職階段的數學史融入教學研究較少的原因則有待進一步斟酌釐清。

三、研究方法分析

表 6 為 1992 年至 2017 年臺灣數學史研究相關學位論文研究方法的描述統計，由表 6 可知研究方法以內容分析法佔最多數，共 91 篇 (63.64%)，而單組前後測最少，只有 1 篇 (0.70%)。從研究典範來看，質性研究所佔比例最大，共 110 篇 (76.92%)，其次為質性與量化並用的研究，有 31 篇 (21.68%)。

表 6

研究典範與方法之統計

研究典範	研究方法	篇數 (篇)	佔全部篇數	
			百分比 (%)	合計
質性研究	內容分析	91	63.64	110 (76.92%)
	行動研究	12	8.39	
	個案研究	7	4.90	
量化研究	準實驗研究	2	1.40	2 (76.91%)
質性+量化	準實驗研究+問卷或訪談	30	20.98	31 (21.68%)
	單組前後測+問卷	1	0.70	

根據表 6 數據，繪製之圓形圖如圖 6：

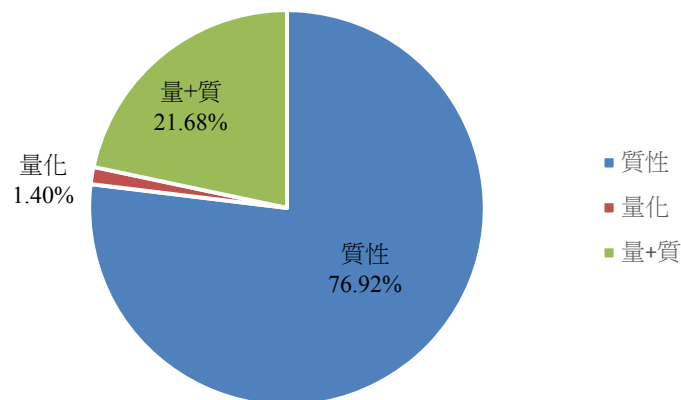


圖 6 研究典範之統計

由圖 6 可看出，質性研究的比例遙遙領先，原因為純數學史研究大部分集中在數學文本的研究，使用的是質性研究中的內容分析法。且在教學應用方面，數學史融入教學的研究中，行動研究也是常用的研究方法之一，因此質性研究的比例最高。在數學史融入教學的研究中，除了行動研究方法外，實驗研究輔以問卷或訪談的研究方法，是數學史融入教學研究的主流，因此質性加量化的研究方法，所佔比例為第二高。

四、HPM 教材開發單元分布研究分析

數學史相關研究的學位論文中，內容含有 HPM 教材開發的篇數共有 49 篇。本研究進一步分析 HPM 教材開發的現況，將學位論文中數學史融入教學的單元名稱，與翰林版教科書的單元名稱做彙整對照（詳細對應資料參見附錄）。本研究並依不同教育階段統整歸納成表 7、8 與 9。因高職教育階段只有 3 篇，且高職教科書版本眾多，因此本研究並未將高職 3 篇的數學單元納入分析。

表 7

(a) 國小階段（一至三年級）數學史融入教學之翰林版數學單元統計

小一（18 單元）		小二（18 單元）		小三（20 單元）	
單元	篇數	單元	篇數	單元	篇數
10 以內的數	0	200 以內的數	1	數線	0
順序與多少	0	二位數的直式加法	0	10000 以內的數	0
比長短	0	二位數的直式減法	0	10000 以內的加減	0
分與合	0	認識公分	2	乘法	0
10 以內的加法	0	加減的估算與兩步驟	0	周界和周長	0
認識形狀	0	比比看	0	公升和毫升	0
10 以內的減法	0	乘法(一)	0	加與減	0
30 以內的數	0	時間	1	除法	2
時間	0	乘法(二)	0	分數	0
100 以內的數	0	乘法(一)	1	圓和角	0
認識錢幣	0	1000 以內的數	1	乘法	0
20 以內的加減	0	1000 以內的加減	0	毫米	0
長度	0	公尺和公分	0	分數	0
立體形體	0	乘法(二)	1	除法	0
二位數的加減	0	幾月幾日星期幾	0	面積	0
日期	0	乘與加減兩步驟	0	公斤和公克	0
加加減減	0	分裝與平分	0	乘與除	0
做紀錄	0	平面圖形與立體形體	0	時間	0
				一位小數	0
				生活中的表格	0
合計	0	合計	7	合計	2
灰格	0	灰格	6	灰格	1

註：灰格代表該單元有開發 HPM 教材。

(b) 國小階段（四至六年級）數學史融入教學之翰林版數學單元統計

小四（20 單元）		小五（20 單元）		小六（16 單元）	
單元	篇數	單元	篇數	單元	篇數
1 億以內的數	3	多位小數	1	最大公因數與最小公倍數	2
乘法	1	因數與公因數	4	分數的除法	2
角度	0	倍數與公倍數	3	長條圖與折線圖	0
公里	0	平面圖形	1	小數的除法	0
除法	1	多位數的乘除	1	圓周長與扇形弧長	1
四則運算	1	擴分、約分和通分	1	比、比值與正比	2
三角形	0	異分母分數的加減	0	縮放圖與比例尺	0
分數	2	四則運算	0	圓與扇形的面積	0
小數	1	面積	3	怎樣解題	2
統計圖表	0	線對稱圖形	0	等量公理	1
一億以上的數	1	分數	2	分數與小數的四則運算	1
概數	1	長方體和正方體的體積	1	角柱與圓柱	0
四邊形	0	容積	2	速率	1
時間的計算	0	時間的計算	2	基準量與比較量	0
周長與面積	0	符號代表數	1	怎樣解題	1
分數	0	表面積	0	圓形圖	0
兩個單位的計算	0	小數	2		
小數	0	生活中的大單位	0		
簡化運算	0	比率與百分率	1		
體積	1	立體形體	0		
合計	12	合計	25	合計	13
灰格	9	灰格	14	灰格	9

註：灰格代表該單元有開發 HPM 教材。

由表 7 可知，在國小階段共有 112 個數學單元，已有學位論文研究教材開發的有 39 個單元，占國小階段所有單元的 34.8%。已有開發教材的 39 單元中，五年級 HPM 教材開發的單元數最多，有 14 單元，其次為四年級和六年級，都有 9 單元，二年級有 7 單元，三年級只有 1 單元，一年級則無開發教材的數學單元。國小階段有六個年級，數學教材的編寫採由淺入深的方式，例如四則運算的部分，在低年級時先教加法與減法的混合運算，再教加法與乘法的混合運算，循序漸進直到高年級才教加減乘除的四則運算。可知在高年級時每個數學單元的內容比中低年級時更加完整，可能因為數學史融入教學須做知識統整，此時數學史融入教學或許較能使學生從中獲得啟發。

表 8

國中階段數學史融入教學之翰林版數學單元統計

國一（8 單元）		國二（8 單元）		國三（6 單元）	
單元	篇數	單元	篇數	單元	篇數
整數與數線	2	乘法公式與多項式	1	相似形	0
分數的運算	0	二次方根與畢氏定理	5	圓形	2
一元一次方程式	0	因式分解	0	外心、內心與重心	0
二元一次聯立方程式	1	一元二次方程式	2	二次函數	0
直角坐標與二元一次方程式的圖形	0	數列與級數	2	立體圖形	0
比例	0	幾何圖形	2	統計與機率	0
線型函數	0	三角形的基本性質	1		
一元一次不等式	0	平行與四邊形	0		
合計	3	合計	13	合計	2
灰格	2	灰格	6	灰格	1

註：灰格代表該單元有開發 HPM 教材。

由表 8 可知，國中階段共 22 個數學單元，其中 9 個單元已有開發教材，占國中階段所有單元的 40.90%，其中以國二階段的 6 單元最多，其次為國一的 2 單元，國三階段最少，只有 1 單元。

表 9

高中階段數學史融入教學之翰林版數學單元統計

高一 (7 單元)		高二 (7 單元)		高三 (7 單元)	
單元	篇數	單元	篇數	單元	篇數
數與式	3	三角	3	機率統計	0
多項式函數	3	直線與圓	0	三角函數	1
指數與對數 函數	2	平面向量	0	機率統計	0
數列與級數	3	空間向量	1	三角函數	0
排列、組合	2	空間中的平面與直線	1	極限與函數	0
機率	0	矩陣	1	多項式函數的微積分	1
數據分析	0	二次曲線	2	極限與函數	0
合計	13	合計	8	合計	2
灰格	5	灰格	5	灰格	2

註：灰格代表該單元有開發 HPM 教材。

高中階段數學史融入教學之翰林版數學單元的統計中，《創作數學史動畫劇本如何介入高中數學教師專業成長：一個個案研究》(陳靜惠, 2011)、《一位高中數學教師參與數學史動畫製作之個案研究》(王嫻玲, 2012)、以及《高中數學教師開發數位科技教材之個案研究--以微積分數學史動畫為例》(劉惠珠, 2012)，這三篇數學史動畫的研究因屬於同一個研究計畫，因此所開發的教材單元只採計一次。

由表 9 可知，高中階段共 21 個數學單元，已有開發教材的單元有 12 個，占高中階段所有單元的 57.14%，其中高一與高二階段都有 5 個單元已開發教材，而高三只有 2 個單元。

整體而言，HPM 教材開發以國小階段最多篇，國中階段次之，高中階段最少篇。不過，不同教育階段各單元的佔比卻以高中階段最高，國中階段次之，國小階段最低。這是因為國小教師在職進修者較多且小學單元分割得比較細而交互影響所致。

伍、結論與建議

一、結論

本研究分析了 143 篇自 1992 年至 2017 年之間，臺灣有關數學史與數學史融入教學的博碩士論文，以探究臺灣過去二十餘年間 HPM 的研究現況。結果發現在純數學史的研究方面，以研究中國的篇數過半最多，而研究歐洲數學史最少。亞洲區域除了中國外，還有對朝鮮及日本等地區的數學史相關研究，究其原因為朝鮮及日本的古代數學文本乃使用漢字書寫，雖然會有文

字表達上的歧義，但經研究者參考相關資料、辭典、文獻，加以研究與推測，仍可以理解日本和朝鮮古代數學文本的意涵。

在教學應用研究方面，數學史融入教學的研究以國小與國中階段的數量最多，高中其次，高職最少。探究其原因，可能與現職中小學教師紛紛選擇進入各師範大學與教育院校的研究所進修，且大多是藉由行動研究利用自身班級進行研究有關。另外，蘇意雯指導多篇數學史融入小學教學也是關鍵因素。至於高中與高職階段的數學史融入教學研究較少的原因則有待進一步斟酌釐清。另外，HPM 教材開發大部分集中在小學的中高年級，這可能是因為數學史融入教學需要統整比較多的概念。

上述論文所使用的研究方法以質性研究的比例最高，這是因為純數學史研究大部分集中在數學文本的研究。而在數學史融入教學的研究中，除了行動研究與準實驗研究外，問卷和訪談是目前數學史融入教學主要的研究工具。至於 HPM 教材在不同教育階段各單元的佔比以高中階段最高（57.14%），國中階段次之（40.90%），國小階段最低（34.80%）。這是因為國小數學主題通常細分為比較多的單元所致。

二、建議

- （一）在數學文本的研究詮釋方面，目前學位論文集在中國傳統的中算、朝鮮東算與日本的和算，建議研究生可以多投入歐洲數學文本的研究，例如英、德、法諸國，或古埃及、古希臘羅馬等文明古國，以比較中西數學史進展的異同。
- （二）在研究人力方面，與整體上的數學教育領域的博碩士論文之總量相比，比例仍然偏低。未來各大學或許可以考慮增列數學史為必修課程，採跨校合作或共同指導論文的方式，以增加更多的研究人力。此外，也有一些博士生畢業之後，未必在各大學的研究所層次服務，但其多年養成的學術素養足可稱之為數學史領域的研究人才，延攬他們加入學位論文之指導是未來各校可以努力的方向。
- （三）在研究主題方面，除了文本分析與數學史融入教學外，其實，還有很多研究方向可以考慮，例如：1. 數學史在數學教材中的定位、價值與功能；2. 數學教材中數學史與數學課程內容的關係；3. 數學教材中數學史的編寫方式與內容；4. 比較國內外教科書融入數學史的編寫方式與內容；5. 不同教育階段數學史的銜接問題；6. 數學史在教學過程中與學生課外學習之應用。此外，若是對照上述 Fauvel 與 Van Maanen（1997）所提出的數學史與「數學的教與學的關係」、「數學史教師的訓練」兩大類的研究問題時，不難發現國內的學位論文的取材上，還有一些改進的空間。
- （四）在 HPM 教材開發研究上：對於已有的 HPM 教材可以作相同單元的整合，且國小、國中及高中階段的尚有許多數學單元未有 HPM 教材的開發，值得後續的研究者投入研究。

(五) 在量化研究實驗設計的改進方面，在目前準實驗研究的論文中，教學實驗期間短則只有五堂課，多則長達一年半。實驗期間到底要至少多久才能產生統計上顯著差異的效果是值得探討議題。至於數學史的呈現方式大都是以口頭講述、書面講義、卡通動畫、影片、或以不同方式合併採用。究竟哪一種能產生最大效果？以正常上課時間呈現或以課外補充資料方式，哪一種能產生最大效果？都是值得探究的議題。還有數學史呈現的時間頻率長短怎樣最為適當？是每一堂課都呈現？還是一週呈現幾節課？每堂呈現幾分鐘？這也都是未來值得探究的方向。

本研究的範圍是臺灣各大學研究所每一年所產出之學位論文(含碩士論文與博士論文)，並不包含國內外的學術會議論文、國內外的期刊論文、臺灣以外的中國大陸地區之學位論文。因此，本研究所獲致的各項數據與依此延伸出來的論述，並無法涵蓋其他範疇，日後如有所引用，需要審慎評估其妥適性。其次，一般而言，研究生完成學位論文之後，或者有改寫成國內外的期刊論文或專書者，或者有在學位論文完成之前或之後以學術會議論文之形式發表者，但是，均不如學位論文的總數量完整，本研究無法周全考量某一篇論文是否同時存在多種發表的形式，故仍宜以學位論文為分析與立論之主要根據，相對之下可以獲致比較完整之數據。最後，有一些博士生畢業之後並未在公私立大學的研究所層級服務，較缺少指導學位論文的方便性，這些學者對數學史方面的貢獻未必呈現在學位論文的指導上，本研究以學位論文的角切入，未來在研究結論的詮釋與應用上，自有相當的限制。

誌謝

本篇論文原是第一作者為參加 2013 年 5 月在海南師範大學的數學史學術會議所寫，當年的研究範圍為是探討到 2012 年的學位論文為止，2018 年在中興大學教師專業發展研究所研究生張鈞淇同學樂心協助下，將研究範圍延伸到 2017 年底的學位論文，她費時無數來整理原始資料而有了初稿，而投稿之後，承蒙諸位審查委員提供寶貴之修改意見，特在此一併致謝。

參考文獻

- 王添法 (1992)。明清時代所譯的《幾何原本》(未出版之碩士論文)，國立臺灣師範大學，臺北市。【Wang, Tian-Fa (1992). *Elements translated in Ming and Qing dynasties* (Unpublished master's thesis). National Taiwan Normal University, Taipei. (in Chinese)】
- 李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏 (2013)。教育部提升國民素養實施方案—數學素養研究計畫結案報告。教育部提升國民素養專案辦公室研究計劃成果報告。臺北市：教育部。【Lih, Ko-Wei, Huang, Wen-Jang, Yang, Der-Ching, & Liu, Po-Hung (2013). *MOE project for uplifting citizen literacy: Final report of math literacy project*. Taipei: Ministry of Education. (in Chinese)】

- 林炎全 (2006)。數學史料融入數學教學引例。取自 http://210.70.9.16/moodle/file.php/241/_doc 【Lin, Yan-Chyuan (2006). *Instructional examples of HPM-integrated lesson*. Retrieved from http://210.70.9.16/moodle/file.php/241/_doc (in Chinese)】
- 洪萬生 (1998)。發刊詞。HPM 通訊, 1 (1), 1。【Horng, Wann-Sheng (1998). Foreword to HPM Newsletter. *HPM Newsletter*, 1(1), 1. (in Chinese)】
- 洪萬生 (1999)。HPM 隨筆 (二): 數學史與數學的教與學。HPM 通訊, 2 (4), 1-3。【Horng, Wann-Sheng (1999). HPM Essay (2): Teaching and learning of mathematics history and mathematics. *HPM Newsletter*, 2(4), 1-3. (in Chinese)】
- 洪萬生 (2001)。參加一九九六年 HPM 研討會有感。HPM 通訊, 4 (5), 1-4。【Horng, Wann-Sheng (2001). Some thoughts about attending 1996 HPM Conference. *HPM Newsletter*, 4(5), 1-4. (in Chinese)】
- 洪萬生 (2004)。數學史如何呈現。科學月刊, 35 (12), 1002-1004。【Horng, Wann-Sheng (2004). How to present mathematics history. *Science Monthly*, 35(12), 1002-1004. (in Chinese)】
- 張俊忠 (2015)。數學史融入初中數學教育的研究 (未出版之博士學位論文)。華中師範大學, 武漢市。【Zhang, Jun-Zhong (2015). *Study on the history of mathematics be integrated into mathematics education in junior high school* (Unpublished Doctoral Dissertation). Central China Normal University, Wuhan. (in Chinese)】
- 楊騰凱 (2016 年 11 月 29 日)。TIMSS 調查: 台灣 8 年級學生數學能力全球第 3。中時電子報。取自 <https://www.chinatimes.com/realtimenews/20161129006870-260405?chdtv> 【Yang, Teng-Kai (2016, November 29). TIMSS survey: Taiwan's eighth-graders having the third place in mathematics ability in the world. *Chinatimes*. Retrieved from <https://www.chinatimes.com/realtimenews/20161129006870-260405?chdtv> (in Chinese)】
- Fasanelli, F., & Fauvel, J. (2006). The international study group on the relations between the history and pedagogy of mathematics: The first twenty-five years, 1976-2000. In F. Furinghetti, S. Kaisjer, & C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of HPM 2004 & ESU 4: ICME 10 satellite meeting of the HPM Group & Fourth European Summer University on the history and epistemology in mathematics education* (pp. x-xxviii). Iraklion, Greece: University of Crete.
- Fauvel, J., & Van Maanen, J. (1997). The role of the history of mathematics in the teaching and learning of mathematics: Discussion document for an ICMI Study (1997-2000). *Educational Studies in Mathematics*, 34(3), 255-259. doi: 10.1023/A:1003038421040
- Furinghetti, F., & Paola, D. (2003). History as a crossroads of mathematical culture and educational needs in the classroom. *Mathematics in School*, 32(1), 37-41.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press. doi: 10.17226/9822
- Nesher, P., & Kilpatrick, J. (Eds.). (1990). *Mathematics and cognition: A research synthesis by the international group for the psychology of mathematics education*. Cambridge, UK: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9781139013499

附錄：HPM 學位論文與教材開發單元彙整

序	研究者	論文題目	指導教授	教育階段	翰林版數學單元（原名稱）
1	王宏哲 (2002)	以數學史輔助學習的教學研究	邱守榕	高職一	一元二次方程式
2	林志全 (2002)	融入數學史對高二學生數學學習成效影響之研究—以「二項式定理」單元為例	左太政	高二	二項式定理
3	陳建丞 (2002)	融入數學史教學對高一學生數學學習成效—以「和角公式」單元為例	左太政	高一	和角公式
4	蕭雅慧 (2002)	以數學史融入PCDC價值教學之行動研究	張靜馨	高一	三角函數
5	宋永耀 (2003)	融入數學史教學對高一學生數學	左太政	高一	對數
6	翁培菁 (2003)	融入數學史教學對國一學生數學學習成效影響之研究—以「平方根的意義」單元為例	左太政	國一	平方根的意義
7	許淑清 (2003)	融入數學史教學對國二學生數學學習成效影響之研究—以「商高定理」單元為例	左太政	國二	商高定理
8	陳俊佑 (2003)	高雄市高二學生研讀複數發展史之個案研究	左太政	高二	複數
9	黃麗霓 (2003)	融入數學史教學對國三學生數學學習成效影響之研究—以「等比數列」與「等比級數」兩單元為例	左太政	國三	等比數列、等比級數
10	王義明 (2004)	數學史融入教學對國一學生數學學習成效影響之研究—以「樣式與規律」為例	蕭龍生	國一	樣式與規律
11	許長輝 (2004)	數學史融入教學對國三學生數學學習成效影響之研究—以「圓形」為例	蕭龍生	國三	圓形
12	蔡佳燕 (2004)	數學史融入教學對高一學生數學學習成效影響之研究	蕭龍生	高一上	函數、因數倍數 最大公因數與最小公倍數、直線方程式、有理數與實數、複數與複數平面、等差等比數列、無窮等比級數
13	賴姝秀 (2004)	古代數學文本融入國小二年級數學教學之實驗研究	林炎全	小二下	1000 以下的數、除法
14	馬婉華 (2005)	融入數學史教學對高一學生數學學習成效影響之研究—以「數學歸納法」單元為例	左太政	高一	數學歸納法
15	王耀璋 (2006)	數學史融入教學以提升學生學習成效之行動研究	秦爾聰	高二	三角函數、向量、空間中的直線與平面、一次方程組與矩陣的列運算、圓與球面、圓錐曲線、排列組合
16	曾智鈿 (2006)	數學史融入國中二年級數學教學實驗研究	林炎全	國二	商高定理
17	劉士毅 (2006)	融入數學史並結合部落格教學對國中生數學學習成效的影響--以平方根與商高定理為例	左太政	國二	平方根、商高定理
18	宋藍琪 (2007)	融入數學史教學對小五學生數學學習成效之實驗研究	易正明	小五	公因數與公倍數、體積與容積、圖形的面積、怎樣解題
19	楊明晉 (2007)	數學史融入教學對八年級學生數學學習成效影響之研究—以「數列與級數」單元為例	林英哲	國二	數列與級數
20	張勝喜 (2008)	數學史融入教學對八年級學生數學學習成效影響之研究-以「一元二次方程式」單元為例	林英哲	國二	一元二次方程式
21	王郁文 (2009)	數學史輔助教學法對國二學生數學學習動機影響之研究-以「尺規作圖」為例	黃建中	國二	尺規作圖
22	沈志龍 (2009)	數學史融入因數與倍數教學對國小六年級學童數學學習態度之影響	蘇意雯	小六	因數與倍數

序	研究者	論文題目	指導教授	教育階段	翰林版數學單元（原名稱）
23	林妙霜 (2009)	數學史融入國小數學教學之實驗研究：以「怎樣解題」單元為例	蘇意雯	小六	怎樣解題
24	邱秀蓮 (2009)	數學史融入國小數學教學之實驗研究：以「二年級乘法」為例	蘇意雯	小二	乘法（一）、 乘法（二）
25	施昱光 (2009)	數學史融入國小數學教學之實驗研究-以「比例」單元為例	蘇意雯	小六	比例
26	洪士翔 (2009)	數學史融入國小四年級教學對學習態度之影響-以「命數系統」為例	蘇意雯	小四	命數系統
27	張虹 (2009)	數學史融入國小五年級數學教學之個案研究	蘇意雯	小五	一億以內的數、時間的應用、公因數與公倍數、擴分與約分、通分與分數的加減、乘以和除以多位數、四邊形與多邊形、小數乘以和除以整數、概數與估計
28	許志昌 (2009)	數學史與數學遊戲融入教學研究-以『負數』單元為例	李明恭	國一	負數
29	陳世智 (2009)	數學史融入國小五年級社團數學教學之個案研究	蘇意雯	小五	記數系統與位值概念、測量、規律、質數、分數、圖形面積、比例、容量
30	廖珮翎 (2009)	數學史融入國小數學教學之實驗研究：以「長度」為例	蘇意雯	小二	長度
31	歐宗賢 (2009)	數學史融入教學對國三學生數學學習成效影響之研究 以「三角形的全等」單元為例	林英哲	國三	三角形的全等
32	蔡幸霓 (2009)	數學史融入國小數學教學之實驗研究:以分數乘法為例	蘇意雯	小六	分數乘法
33	謝宗穎 (2009)	數學史融入國小數學教學之實驗研究-以「圓」為例	蘇意雯	小六	圓
34	周育民 (2011)	數學史融入國中「多項式的乘法公式」單元教學之研究-以臺南地區為	林英哲	國二	多項式的乘法公式
35	陳宇薇 (2011)	數學史融入國小六年級數學教學之行動研究	蘇意雯	小六	最大公因數與最小公倍數、分數除法、數量關係、比與比值、列式與解題、簡化問題
36	陳秀玲 (2011)	數學史融入國小二年級數學教學之行動研究	蘇意雯	小二	數到 200、量長度、幾點幾分
37	陳章勇 (2011)	以故事、合作、對話、反省融入國中生數學學習的行動研究	林信榕	國二	畢氏定理、質數、方程式
38	陳靜惠 (2011)	創作數學史動畫劇本如何介入高中數學教師專業成長：一個個案研究	蘇意雯	高中	費氏數列及黃金分割、複數、圓錐曲線、微積分、三角函數
39	游曉琦 (2011)	數學史融入教學對國中資優生數學學習成效影響之研究	張昇鵬	國二	質數、數的發展、圓、有理數與無理數
40	王嫻玲 (2012)	一位高中數學教師參與數學史動畫製作之個案研究	蘇意雯	高中	費氏數列及黃金分割、複數、圓錐曲線、微積分、三角函數
41	洪秀年 (2012)	數學史融入國小四年級數學教學之行動研究	蘇意雯	小四	乘法和除法、體積、數的十進位結構、小數除法與分數
42	劉惠珠 (2012)	高中數學教師開發數位科技教材之個案研究--以微積分數學史動畫為例	蘇意雯	高中	費氏數列及黃金分割、複數、圓錐曲線、微積分、三角函數
43	姚杏沛 (2013)	數學史融入國小六年級數學、國語與綜合教學之行動研究	蘇意雯	小六	分數的四則運算、速率、簡化問題、怎樣解題
44	王淑明 (2014)	數學史融入國中七年級數學社團教學之行動研究	蘇意雯	國一	計數系統、負數、質數、最小公倍數、科學記號、二元一次聯立方程組
45	宋狄熙 (2014)	數學史融入國小數學教學之實驗研究：以「三年級除法」為例	蘇意雯	小三	除法

序	研究者	論文題目	指導教授	教育階段	翰林版數學單元（原名稱）
46	周士弘 (2015)	數學史融入高職一年級數學教學之行動研究	蘇意雯	高職一	多項方程式 一次方程組 複數的四則運算
47	王勝逸 (2016)	數學史融入五年級補救教學之個案研究	蘇意雯	小五	整數的乘法、因數與倍數、分數、小數的乘法、面積、時間的計算
48	郭又愷 (2016)	高雄地區高職一年級數學史融入教學之行動研究-以三角函數單元為例	蕭龍生	高職一	三角函數
49	陳品卉 (2017)	數學史融入教學對八年級學生數學學習動機與學習成就影響之相關研究：以幾何單元為例	蘇意雯	國二	幾何

備註：研究者自行整理。

黃俊瑋 (2019)。

和算知識中的術、法、表之意義與特色。

臺灣數學教育期刊, 6 (1), 53-77。

doi: 10.6278/tjme.201904_6(1).002

和算知識中的術、法、表之意義與特色

黃俊瑋

臺北市立和平高級中學

知識從事者認為重要而值得探討的問題，及他們所尋求適當答案的種類，往往因社群而異。由這些社群所生產出來的知識種類也展現出差異。本研究貼近和算文本與脈絡，闡述和算家所發展的數學知識類型—術、法、表—探討它們的意義與功能，並比較之間的差異。「術」為程序性且機械性的演算法，可視為將問題的數據逐步作運算、操作、轉化，最終獲得答案的作業流程，有時也表徵了某些公式或定理。它既是和算家尋求的答案類型，也是求得數值解的重要媒介，並揭示了數量之間的抽象關係。「法」是程序性的數學運算或數學方法，藉以計算求得數值，或常被鑲嵌於術文中，作為執行演算法的子程式或作業流程中的子程序。「表」則記錄、濃縮了數學知識，呈現出數學概念與數學物件之間的靜態關係與結構，並作為重要認知工具，被用於求解問題以及探索、核證知識的過程中。和算家立法則、創諸表作為基礎數學工具，提出數學「問題」後，存在研究與實作兩種知識活動面向：利用相關知識輔以「法」的使用與「表」的檢索，造出概括性的演算法「術」。再者，據已知數（量），依「術」的流程，搭配「法」或「表」，利用計算工具，在紙或計算表面上機械化地逐步操作、計算，求得相應的數值解。

關鍵詞：HPM、日本和算、知識論文化、數學史

通訊作者：黃俊瑋，e-mail：austin11119@gmail.com

收稿：2018年12月27日；

接受刊登：2019年3月21日。

Huang, J. W. (2019).

The meanings and characteristics of mathematic knowledge in Wasan - Jutsu, hō and Hyō.

Taiwan Journal of Mathematics Education, 6(1), 53-77.

doi: 10.6278/tjme.201904_6(1).002

The meanings and characteristics of mathematic knowledge in *Wasan - Jutsu, hō and Hyō*

Jyun-Wei Huang

Taipei Municipal Heping High School

The problems that practitioners consider crucial and worth researching as well as the appropriate solutions they seek are vary by community. As a result, the types of knowledge produced by communities also differ. This paper aims to explain three types of knowledge, namely jutsu (術), hō (法), and Hyō (表), in the context of Wasan by identifying and discussing their meanings and functions and comparing them. Jutsu is considered a procedural and mechanical algorithm and can also be seen as a procedure by which operations and computations are applied to the values in mathematics problems step by step to result in an answer. Jutsu is an instrument for obtaining numerical solutions and the types of solution preferred by Wasan mathematicians. Sometimes, Jutsu connotes a formula or theorem and reveals an abstract relationship between values or magnitudes. Hō is a procedural mathematical operation or method through which Wasan mathematicians can calculate values, and it is often a subprogram or a subprocedure of the primary algorithm in the procedure of Jutsu. Hyō records and condenses mathematical knowledge and reveals the structures of and relationships between mathematical concepts and mathematical objects, and it is treated as an instrument for problem solving and is used in the processes of exploring and justifying knowledge. When Wasan mathematicians propose mathematics problems, two aspects of knowledge activities related to mathematics research and practice are considered: They construct Jutsu using the hō or the hyō or mathematical knowledge relevant to problems, and they operate and calculate step by step on paper or another surface used for calculating to obtain the numerical solutions according to the steps of Jutsu through the use of calculators.

Keywords: HPM, Wasan, epistemological culture, history of mathematics

Corresponding author : Jyun-Wei Huang , e-mail : austin11119@gmail.com

Received : 27 December 2018;

Accepted : 21 March 2019.

壹、緒論

數學史家林力娜(2010)基於凱勒(Evelyn Fox Keller)在《理解生命》(make sense of life)一書中的觀點,以《九章算術》為例,探討了古代中國的知識論文化。她在文中指出,從事者(practitioners)認為重要而值得探討的問題,以及他們所尋求適當答案的種類,往往因社群而異。由這些社群所生產出來的知識種類,也展現出差異。歷史學家在研究這些社群時,倘若不探討在社群內所發展出來的「知識的需求」(epistemic needs),便無法掌握重要特徵,來描述這些社群如何選擇其問題並闡述他們所要的答案。根據她的看法,我們必須同時考慮「某個特定的科學家群體所秉持的規範和習俗,在這些規範和習俗的基礎上,科學家賦予字詞—如『理論』、『知識』、『解釋』與『理解』甚至『實作』這個概念本身—意義」。

「問題—答案—術文」的呈現方式,是傳統中算的文本(如《九章算術》)的典型體例。換個角度來看,當時的數學家從事的數學知識活動,主要包含了問題的提出、求得(數值)答案、以及連結了問題與答案的演算法或公式。這樣的傳統,影響了漢字文化圈裡的數學文化與實作,而江戶時期的「和算」,主要依附在傳入的中算書而發展,具有類似的書寫體例,並同樣展現出對問題、答案與術的追求,然而,和算家也發展出在地化的數學觀點與特色。¹

例如,和算家建部賢弘(2008)在《綴術算經》序言中,²提出他對數學研究的看法:「夫算,立法則、究術理、計員數為事。」換言之,他將數學知識活動分成三類,並在書中各提出四個問題作說明與討論。其中,「法則」是程序性的計算程序或方法(包含乘除法、約分之法、招差之法等);「術理」一般可視為機械性的演算法或公式;而「員數」與求圓周長、弧長、體積、開平方等數學問題的數值解有關。若再考究和算文本,在和算家提出數學問題後,通常會以「數(量)」與「術」作為主要的答案類型,而法則雖是數學研究的對象,但一般被用於解題的過程,並非問題的答案主體。再者,由於「數」指的是數學家所關心的特定常數、所求的幾何量或者問題的數值解,較易於一般人理解,因此,本研究中,將特別聚焦在「術」與「法」的部份。

另一方面,十八世紀後,和算家也逐漸發展出另一種型態的數學知識—各類數值「表」與圓理「表」,這些「表」除了記載知識外,更兼具其它的認知意義與功能。例如小出兼政(2008)在《圓理算經》序言中提到:「凡圓理之法,用表得解術者,皆始自和田子,無製表之術,稱不

¹ 本研究的主要內容,為江戶時期日本傳統數學,包含其知識社群的相關知識活動與知識發展。相較於中算與東算(韓國數學),一般以和算稱呼江戶時期所發展的日本傳統數學,並以和算家指稱當時的日本數學家。因此,本文中討論的知識社群即和算家社群,知識從事者即和算家。

² 建部賢弘(Takebe Katahiro, 1664-1739)是關流創立者關孝和的弟子,他的《綴術算經》也被譽為最傑出的和算著作之一,一方面是他晚年的集大成著作,同時也在書中闡述了數學認識論與方法論方面的觀點。這本書完成後,亦被建部賢弘獻給當時的掌權者德川吉宗將軍,可見此書的重要性與意義。

得捷徑之解術。³」可見「表」作為解題工具上的重要性。該書前二卷內容，仍是數學問題集及其解法與答術，然而〈卷之下〉則以一整卷的篇幅，羅列了諸類數學表。同時，該書的編排順序並非以知識作分類，而是依「表」的類型來對問題分類，展現出「表」在當時和算研究上的重要意義。然而，綜觀目前有關和算的研究，主要以和算家之傳記、和算文本解讀、數學知識發展乃至數學社會史、數學文化相關，但尚未出現任何與知識論文化相關的研究。因此，本研究從知識論文化的觀點切入，考察 17-19 世紀間的重要和算數學文本，透過文本分析與歷史分析，探討和算文化中的知識需求—和算社群所關切的重要數學物件「術、法、表」，並比較這些數學物件之間的關係與差異，探討它們的特色以及相關的數學概念與認知意義。其中，「術」是機械性的演算法，通常可視為數學問題的公式解；「法」是一種程序性的數學運算、數學方法，例如乘法、約分法、解方程式法則等皆是；「表」則是格子狀的矩形陣列，記錄數值或數學符號、數學物件以及它們的關係。

再者，過往 HPM 相關研究主要是數學史在數學教育的應用，以情意面向或數學概念的學習為目的，歷史作為輔具。本研究則嘗試從另一個方向著手，利用數學教育的理論來幫助數學史的研究。Sfard (1991) 透過對數學概念發展過程的歷史分析與概念分析，提出數（如正整數、有理數、實數、複數）、對稱性或者函數等抽象數學概念，可藉由兩種方式理解與認知，包含結構性的靜態數學「物件」(object)，或者操作性的動態數學「程序」(process)，而此「程序-物件」二元性正為數學概念的一體兩面。她認為對數學概念的認知過程，一般是程序操作面向先於結構物件面向，且吾人透過對具體實物或低階數學概念的操作過程，認知新的數學概念，並且透過對具體實物或低階概念的操作，可將之內化成概念操作，進而物化成數學物件，得以進行運算操作。這樣的理論提供我們考察數學概念發展的一種新觀點。因此，本研究除了貼近一手文本，進行和算文本分析與歷史分析，並嘗試利用此認知理論與觀點，審視和算數學概念、數學物件—術、法、表—的發展脈絡與意義。對於數學史研究與數學教育之連結，提供更多元面向之論述與研究進路。

貳、「術」的意義與特色

設計問題是和算知識活動的核心，而這些問題主要是以「數（量）」和「術」作為所求的答案。林力娜 (2010) 認為，許多線索顯示，演算在古代中國數學占有核心地位，而最足以說明此事實的，便是《九章算術》以「算術」一詞為書名。而和算文本中的術與傳統中算的術，也有著

³ 小出兼政 (Koide Kanemasa, 1797~1865) 的《圓理算經》主要收集了幕末最重要和算家和田寧 (Wada Yasushi, 1787~1840) 的數學研究成果，由於 1836 年發生於三田台町的一場大火，使得和田寧的重要研究成果付之一炬。因此，和田寧的研究成果，主要透過他的學生們記錄、整理而流傳。《圓理算經》便是小出兼政據和田寧遺稿彙編而成。

類似的意義與特性。「術」這個字經常被用來引介一連串的運算步驟，對於問題的數據—包括量 (magnitudes) 和值 (values)—進行運算，以得出所求的量和它們的數值。林力娜也指出「術」有兩個面向，現存的著作展現出其中一個面向，也就是列出一組運算步驟的文本本身。然而，這些運算也意味著第二個面向的存在：亦即在某個「表面」上進行計算的演算法。因此，所謂的「術」並不只限於指示計算步驟而已，這些演算法以一組運算步驟的形式呈現。一方面，它們陳述了一種轉化的關係 (a relation of transformation)，並由此得出一個量 (magnitude)。另一方面，它們被看成一連串的運算步驟，可以在用來計算的表面上操作，因而關聯到實際的計算動作，並得出一個數值 (value)。

多數的和算文本裡，「術」同樣可視為一種演算法 (algorithm)，某些時候，「術」亦看成一數學公式，許多術文的內容與現今熟悉的數學公式有關。例如關孝和 (2008b) 的《解見題之法》，便提到了求梯形面積之術：「置小頭，加入大頭，共得數以長相乘之，得數折半之，得積。」此術是利用梯形已知的「小頭」、「大頭」與「長」等條件，逐步計算出面積的演算法。同時，術文中也呈現了這些幾何量之間的關係：梯形面積 = $\frac{(\text{小頭} + \text{大頭}) \cdot \text{長}}{2}$ ，可視為梯形面積公式。

又或者書中提到的求方錐體積術：「置下方，自乘，以高相乘之，得數以三約之，得積。」此術一方面可看成利用「下方」(方錐底邊)與「高」等已知數據，求得體積的演算法，同時也可視為方錐的體積公式：方錐體積 = $\frac{\text{下方}^2 \cdot \text{高}}{3}$ 。又如關孝和 (2008a)《括要算法》所提到的圭垛

術：「置底子，加一個，以底子相乘，得數以二約之，得積合問。」此術可看成利用底子數，計算出圭垛總數的演算法，也可視為垛積公式：
$$\sum_{k=1}^n k = \frac{(n+1)n}{2}$$
。⁴

除了可視為演算法或公式之外，也有些「術」的內容，本質上陳述了一個數學定理或性質。例和關孝和《解見題之法》提出下述問題與術文：「假如有勾股，勾若干，股若干，問弦。置勾，自乘之，加入股冪，共得數為實，開平方除之，得弦。」此術文的內容，本質上為勾股定理所蘊含的關係：弦 = $\sqrt{\text{勾}^2 + \text{股}^2}$ ，亦可看成利用「勾」與「股」求得「弦」的一種演算法。

另外，「術」通常具有程序性與機械性的特色，並呈現出轉化的關係，連結給定條件與所求數或量。換句話說，問題條件中給定的各數據或抽象的幾何量，透過「術」，可機械地且程序地依據演算法的每個步驟，進行計算、操作與變換，逐步將已知條件中的數(量)，轉換成新的數(量)，如此，最終得所求的數(量)。因此，「術」可視為連結了給定條件與所求數(量)的一種轉化關係。

⁴ 垛積術本質上即級數公式，其中若將 $1+2+3+4+\dots+n$ 個物依序排列形如三角，故以圭垛術稱之。

以安島直圓（2009a）所著《不朽算法》書中的第七問為例，⁵該問題所給的術為：「列子、乘丑、四之、平方開之、得平、合問。」此術的內容是一個包含了「列子」、「乘丑」、「四之」、「平方開之」四個程序性步驟的演算法（如圖 1 所整理），依此演算法，可將題設條件中「子」所代表的幾何量，逐步作轉換，先轉換成「子·丑」，再轉換成「4子·丑」，最終轉換成所求的幾何量「平」。

$$\begin{array}{ccccccc} \text{列子} & \text{乘丑} & & \text{四之} & & \text{平方開之} & \\ \rightarrow \text{子} & \rightarrow \text{子} \cdot \text{丑} & \rightarrow & 4 \text{子} \cdot \text{丑} & \rightarrow & \sqrt{4 \text{子} \text{丑}} & (= \text{平}) \end{array}$$

圖 1 《不朽算法》第七問之施術流程圖

「術」除了呈現出一種動態（dynamic）的轉換關係，以及程序且機械性的操作過程外，它更揭櫫了一種「數學實作」的過程。換言之，它暗示了和算家如何從事數學知識活動：給定了「子」所代表的數值後，利用術中「列子」、「乘丑」、「四之」、「平方開之」等四個動作，依次在紙上或計算板上進行操作與運算，可逐步將「子」轉換成所求數值「平」。同時，「術」的內容亦可視為已知量與所求量之間的一種關係式，即「 $\text{平} = \sqrt{4 \text{子} \times \text{丑}}$ 」。

若再以《不朽算法》書中的第二十問為例，該問題為：「今有長立圓，長徑若干、短徑若干、如圖斜截之、橫徑若干、問上下截積各幾何？」它是在已知橢球的長徑、短徑與橫徑等條件下，利用平面截此橢球，求所截出上下兩部份區域之體積。書中所給的術為：「短徑冪內減長徑冪、餘平方開之、得商以減短徑，餘寄位。自乘之，加橫徑冪三段，乘寄位、以長徑及圓率乘之，得數以短徑一十二段除之，得上積，合問。」此術所呈現的程序性演算法，較前述第七問來得複雜，筆者將此術所代表的演算法流程整理成表 1。

⁵ 本問題與菱形之內切圓有關。《不朽算法》是 18 世紀末期和算家安島直圓（Ajima Naonobu, 1732 - 1789）的作品，該書主要為問題集的形式，收錄許多重要的和算問題與解術。

表 1

《不朽算法》第二十問之術文與演算法

術文	術文所對應的程序性演算法
短徑幕內減長徑幕 平方開之	$\text{長徑}^2 - \text{短徑}^2$ $\rightarrow \sqrt{\text{長徑}^2 - \text{短徑}^2}$
得商以減短徑	$\rightarrow \text{短徑} - \sqrt{\text{長徑}^2 - \text{短徑}^2}$
餘寄位	$\rightarrow \text{短徑} - \sqrt{\text{長徑}^2 - \text{短徑}^2}$ (= 寄位)
自乘之	寄位 · 寄位
加橫徑幕三段	$\rightarrow (\text{寄位})^2 + 3 \text{橫徑}^2$
乘寄位	$\rightarrow (\text{寄位}^2 + 3 \text{橫徑}^2) \cdot \text{寄位}$
以長徑及圓率乘之	$\rightarrow \text{長徑} \cdot \text{圓率} \cdot (\text{寄位}^2 + 3 \text{橫徑}^2) \cdot \text{寄位}$
得數以短徑一十二段除之	$\rightarrow \text{上積} = \frac{\text{長徑} \cdot \text{圓率} \cdot (\text{寄位}^2 + 3 \text{橫徑}^2) \cdot \text{寄位}}{12 \cdot \text{短徑}}$

資料來源：研究者整理繪製。

由於執行上述演算法的過程中，所得代數符號較複雜之故，安島直圓在過程中作了「變數代換」的動作，他先將「 $\text{短徑} - \sqrt{\text{長徑}^2 - \text{短徑}^2}$ 」寄位，亦即將這一串式子背後的演算法，計算所得的結果，先記錄、寄放在一旁的位置上，以待後續使用。而後續的演算法中，則以「寄位」指稱這一串複雜的式子（或計算所得結果）。最終，將已知條件中的「長徑」、「短徑」與「橫徑」透過此程序性的演算法，轉化成所求的「上積」。同時，此術也可視為下列關係式：

$$\text{上積} = \frac{\text{長徑} \cdot \text{圓率} \cdot (\text{寄位}^2 + 3 \text{橫徑}^2) \cdot \text{寄位}}{12 \cdot \text{短徑}}$$

其中， $\text{寄位} = \text{短徑} - \sqrt{\text{長徑}^2 - \text{短徑}^2}$ 。

除了上述這類有限步驟的術之外，和算家求解問題所得之術，亦包含了無窮個步驟的「綴術」。我們以小出兼政（2008）所編著《圓理算經》中的得圓周術—已知圓之直徑求圓周長—為例，書中將圓與直徑之間的關係表示成程序性的演算法：「置圓徑，倍之，為原數，一幂乘、二三除，為一差；三幂乘、四五除，為二差；五幂乘、六七除，為三差，遞推之求逐差，以疊加於原數，得周（徑一個者即圓周率），合問。」筆者在表 2 之中，整理了此求圓周術的內容與相對應的演算法。

表 2

得周術之術文與演算法

術文	術文所對應的程序性演算法
置圓徑	圓徑
倍之，為原數	→ 2 圓徑 (= 原數)
一幂乘、二三除，為一差	→ 原數 · $\frac{1^2}{2 \cdot 3}$ (= 一差)
三幂乘、四五除，為二差	→ 一差 · $\frac{3^2}{4 \cdot 5}$ (= 二差)
五幂乘、六七除，為三差	→ 二差 · $\frac{5^2}{6 \cdot 7}$ (= 三差)
遞推之求逐差	→ 三差 · $\frac{7^2}{8 \cdot 9}$ (= 四差)
	→ 四差 · $\frac{9^2}{10 \cdot 11}$ (= 五差)
	→
以疊加於原數，得周	周 = 原數 + 一差 + 二差 + 三差 + 四差 + ...

資料來源：研究者整理繪製。

從術文與演算法的比對不難發現，其為一種具遞迴關係的演算法，由已知條件「圓徑」可求得原數；由原數可求得一差；由一差可再得二差等等，最後再「遞推之求逐差」，利用前後差之間的關係與規律，逐項求得任意的第 k 差。和算家利用類似的演算法，可以程序且機械地不斷重複類似的操作過程。因此，這個演算法是一種隱含了「無限」步驟的演算法，可依據需求，持續不斷地操作下去。然實際計算求數值解（圓周長）的過程，可參照所欲求得數值的精確程度，來決定計算至多少項（操作多少個步驟）。當然，此術亦相當於表示出圓周長 L 與其直徑 R 之間的關係：

$$L = 2R\left(1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{3}{5 \cdot 8} + \frac{15}{7 \cdot 48} + \frac{105}{9 \cdot 384} + \frac{945}{11 \cdot 3840} + \dots\right)$$

綜合來看，「術」通常可視為一種演算法，可將已知數據動態地、程序地並且機械地逐步轉換成所求的數或量，同時，「術」也負載著數學公式或數學關係式的特性。而和算文本中提出的「術」，通常是一種概括性的演算法，揭示變量之間的抽象性關係。再者，「術」也可視為將題設條件逐步轉化獲得問題答案的作業流程，當問題的條件為既知的數值時，只需將這些數值，依「術」所揭示的作業流程，實際在紙或計算表面上逐步作操作、計算，最終可得出所求的值。

許多和算文本中，問題的「答案」並不再列出數值解，而僅列出抽象性、概括性的術作為問

題的答案，再指示可依此演算法代入問題條件中的數值（若有給定），計算求得數值解。一方面顯示他們偏好概括性地解題之外，也暗示了數學知識活動存在研究與實作兩個面向，包含依據已知性值進行探索「造術」的研究過程，以及實際依演算法操作「求數」的計算動作。

參、「法」的意義與特色

一、法的意義與特色

如前述，和算家將數學研究分成「立法則」、「究術理」、「計員數」三類，他們感興趣的數學知識活動主要為問題的設計與求解，而問題所探求的答案種類主要為「術」與「數」。至於法則—包含常見的因乘法、歸除法、約分法、招差法、開方法等—通常並非和算家求解問題的最終答案或目標，而是作為求解問題所依賴的「方法」或「工具」，是一種程序性的「數學運算」、「數學方法」或「數學操作」。接著筆者同樣以建部賢弘（2008）所著的《綴術算經》為例，介紹和算家常用的基本「法則」。首先，此書前四個問題的標題分別為探乘除法則、探立元之法、探約分之法與探招差法，其中的第一問包含了兩個與乘法有關的問題，這兩個問題的術（演算法）分別為：「置粟數，以斛價銀乘之，得該價銀也」與「置元粟數為實，以人數為法，除之，得每人分粟。」它們都是連結已知條件與所求的演算法，然而演算法中分別包含了「乘」與「除」兩個基本的「數學運算」，而乘法便是解決這兩個問題所仰賴的法則。

以第一術為例，當中總共涉及了「置粟數」以及以「斛價乘之」兩個主要動作，第一個動作「置」為物理上的動作，而第二個動作「乘」則為一種數學操作上的動作，亦即執行「乘」這個數學運算（「乘」這運算本身又包含了若干個子操作），而「因乘之法」指的便是「乘」這個數學運算中所附屬的整個過程。儘管本問題中所求的是「數」（量），但和算家仍傾向於提出具概括性的「術」，而「法」則是作為執行或操作演算法（術）的其中一環，在實際求解的過程，透過「乘（除）法」這個程序，對已知數或量進行「數學操作」，計算求得數值解。多數和算文本中的「術」，皆涉及了某些數或量的乘除，而此二法便作為解決數學問題或執行演算法過程的基本法則。

該書的第二問，則闡述了何謂立元之法，並說明如何透過此法建立方程式，進而求得問題的解，並討論了此方法的優點。所謂的立元之法，便包含了設立未知數至最終求得方程式的整個過程。如同建部賢弘（2008）所云：「據理探索，有立元之法則而貫萬術。」即立元之法是和算家用以處理各問題的重要法則。另外，建部賢弘也進一步提到關孝和將立元之法推廣成解伏題之法，而此法是一套經由列式、消元等代數變換過程，以求解出含多個未知數問題的「法則」。被廣泛用於求解「伏題」類問題。另外，和算家求解問題的過程中，常會求得所求數或量的一元高次方程式，此時需依解方程式的方法「開方翻法」來求此一元高次方程式的數值解，而「開方

翻法」同樣是和算家解題施術過程中的常用法則。《綴術算經》第三個問題的內容與約分有關，建部賢弘藉此問題說明如何探求約分法則。再來的第四個問題則為垛積問題，建部賢弘以實際數據探得「招差法則」進而推得垛積術。此外，他也提出了方程法則，作為解聯立方程式的程序性方法。

這些「法則」看似簡單但實為重要且應用廣泛，是和算家解決問題、執行演算法的重要基礎。誠如建部賢弘所云：「立法則，施術之原也」，當「法則」建立之後，它們通常作為和算社群裡的基礎先備知識，這些知識既非算學研究關切的「問題」本身，亦非特定數學問題的「答案」，而是作為算學研究或計算求解時所仰賴的「工具」。無論是《綴術算經》所列的因乘之法、歸除之法、立元之法、約分之法、招差法以及方程法則，或者其它和算文本中所提出的解穩題之法、解伏題之法以及求開方式數值解的開方翻法等，各種「法則」廣泛地被和算家用於求解問題或執行演算法計算答案的過程中。這些法則可視為執行術（演算法）過程中的程序性知識，並如同既知的「子程式」，鑲嵌在「術」裡，術文中僅需言明「乘」、「除」、「約之」、「以幾乘方翻法開之」等數學運算或操作，不再詳細列出相關細節，從事數學知識活動者，便可依據相關「法則」所涉及的程序性方法，自行、自動執行相關計算與操作。

二、法與術

「法」可視為一種程序性的方法、運算或數學操作，而「術」通常被視為包含一系列機械性程序的演算法，且隱含某些關係或公式。乍看之下，兩者似乎雷同，然「關係性」、「機械性」以及「通用性」是兩者主要差異。接著，筆者從「法」與「術」的比較切入，說明兩者的差異，有助於釐清「法則」的意義。

諸如乘法、除法、開方法等法則，都是一種程序性的「操作」或「運算」，可視為一個或若干個操作或運算的組合，但操作本身不涉及關係。另一方面，以前面提到過的「置粟數，以斛價銀乘之，得該價銀也」為例，此術是一種從已知條件「粟數」逐步求得「價銀數」的演算法，亦顯示出「粟數·斛價銀＝價銀數」這些量之間關係。但「因乘之法」所強調的是「乘」這個動作或數學運算本身，而非關係的揭示。因此，「術」通常是包含了一連串操作歷程的演算法，並揭示了已知量與所求量之間的關係，而「法」指的則是完成某數學運算或數學操作的「方法」本身，一般與數或量之間的關係無直接關連。

再者，雖然「術」與「法」皆具有程序性的特色，但「術」比起「法」而言，更具「機械性」。例如上述的「置粟數，以斛價銀乘之，得該價銀」共包含了兩個主要的子程式，無論數據多少，只要明確而機械地執行上述「置粟數」再「以斛價銀乘之」這個演算法，便可計算得所求。又或者《綴術算經》第四問的解術：「倍底面，加三，底面乘之，加一，又底面乘之，六而一，得積也。」只需依問題所給的「底面數」機械性執行「倍底面」→「加三」→「底面乘之」→「加一」

→「又底面乘之」→「六而一」共六個的運算程式，便能計算出所求之積。

然而，「法」本身往往帶有「不明確性」，例如以開方法開平方或以開方翻法求方程式根的近似值的過程中，必需依據題目的數據，以及每開得一位後所得新數據，重新判斷並決定如何開下一位。因此，雖然執行法則的過程，也具有一定的程序性，卻往往無法很明確地、機械性進行操作，而帶有若干人為的「判斷」與「決策」。

最後，再就通用性來比較兩者，「術」一般是用以處理單一問題的特定演算法，作為某特定問題的答案，必須附屬於該問題之下，或可視為該問題的公式解。「術」也明確地描述了特定問題條件中各變量間的關係(例如描述勾股定理的術)，一般而言，當我們將問題本身抽離時，「術」便失去它的意義，而描述勾股定理的術，也只限於勾股定理相關場合。然而，「法」是一種較為通用性的基礎知識，包含前面提到的因乘法、歸除法、約分之法、立元之法乃至開方翻法等各類法則，並不直接與單一問題相關，也不從屬於特定問題，適用場合較「術」為廣，被用於不同問題的求解過程，或被置於不同的「術文」的脈絡中，無論和算家解題、造術或求數的過程，往往離不開這些常用的法則。

綜合來看，各類「法則」所涉及的這些數學操作或數學運算，可謂和算家的基礎知識，作為演算法的其中一環，這些「法」亦可視為執行演算法流程的子程序，被置放在「術」的局部程序中。

肆、「表」的意義與特色

一、表的特色、功能與本質

除了「術」與「法」之外，十八世紀中期之後，「表」慢慢成為和算家研究與關切的重要數學物件。儘管他們所提出的數學問題，仍是以數值解以及求得問題的演算法－術－為主，並不以「表」作為答案，但這些「表」，儼然成為另一種新型態的數學知識與認知工具。從外在的表徵來看，「表」通常是一種格子狀的矩形陣列，利用二維的矩形陣列記錄數值或數學符號，並依據不同行列位置賦予格子中的數學物件不同意義。有些「表」的功用，類似於紀錄數值的矩陣，可作為紀錄數學知識之用，然而更多時候，「表」的內容羅列了數值之間的關係或幾何量之間的關係，特別是同一行或同一列之中的數值與符號，通常具有某種特殊關係(例如：某些開展式的各項係數或某些變量之間的關係與函數關係等)。

無論是藤田貞資(1781)《精要算法》中，⁶記錄了特殊三角形的三邊長，或者安島直圓(2009a)所造指數表，又或者《圓理算經》中的「圓弧積線表」，列出許多幾何量的無窮級數展開式。這

⁶ 《精要算法》是18世紀中期的重要和算著作，藤田貞資(Fujita Sadasuke, 1734~1807)出版本書，作為和算教科書之用，促進了和算的普及化。

些「表」都承載了記錄數學知識的功能，並且連結了不同概念或幾何物件，揭示了它們之間的關係。然而，「表」除了是和算家用來記錄數學概念、數學關係與數學性質的工具外，也是表徵數學知識的新方式。例如，《圓理算經》中的「應率八態表」與「應率八象表」等，⁷將原屬於文字演算法形式的開方綴術（二項式展開式），以表的方式呈現，一般化且濃縮地記錄了這些展開式的係數與關係結構。

我們以小出兼政《圓理算經》書中的陽除表為例（如表 3），⁸該「表」與 $(1-x)^{-n}$ 的展開式有關，羅列了 $(1-x)^{-1}$ 、...、 $(1-x)^{-7}$ 的展開式係數，並利用表中的不同行列位置，來代表不同項的係數。其中，表的每一行各代表了不同幕次的 $(1-x)^{-n}$ 展開式，而各列則為展開式中不同幕次項的係數。例如，「一形」該行相當於 $(1-x)^{-1}$ 的展開式：

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + \dots$$

而「四形」所屬的那一行，則相當於 $(1-x)^{-4}$ 的展開式：

$$\frac{1}{(1-x)^4} = 1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + 35x^4 + 56x^5 + 84x^6 + 120x^7 + \dots$$

表 3

《圓理算經》之陽除表

陽除表	一形 $1/(1-x)$	二形 $1/(1-x)^2$	三形 $1/(1-x)^3$	四形 $1/(1-x)^4$	五形 $1/(1-x)^5$	六形 $1/(1-x)^6$	七形 $1/(1-x)^7$
原數	1	1	1	1	1	1	1
一差	1	2	3	4	5	6	7
二差	1	3	6	10	15	21	28
三差	1	4	10	20	35	56	84
四差	1	5	15	35	70	126	210
五差	1	6	21	56	126	252	462
六差	1	7	28	84	210	462	924
七差	1	8	36	120	330	792	1716

註：參考圓理算經重製，並以現代符號表示。

⁷ 「應率八態表」與「應率八象表」分別包含八個表，且各自記錄八類二項展開式的各項係數。八態表中記錄的是含 $(1 \pm x)^k$ 項的展開式係數，而八象表則記錄了含 $(\sqrt{1 \pm x})^k$ 項的展開式係數，其中 k 為整數。

⁸ 原表為直式，由右往左書寫，這裡筆者改成橫式由左而右，並以現代的符號表示該表中的籌式。表中的率即 x ，和算家並未討論這些無窮級數收斂的條件。

觀察此表中數字部份的內容，它記錄了多個 $(1-x)^{-n}$ 展開式的係數，以及不同展開式係數之間的關係。表中第 n 行第 $k-1$ 列所列出的數字，恰為 $(1-x)^{-n}$ 展開式中 x^k 項的係數，亦即呈現出數對 (n, k) 與對應係數之間的數值關係。傳統上，和算家若要表示出表 3 所給的 $(1-x)^{-1}$ 、 $(1-x)^{-2}$ 、...、 $(1-x)^{-7}$ 展開式時，總共需要七個不同的文字術文，然而，以圖 2 為例，透過表的使用濃縮、簡化了原本冗長的文字術文，表中各行表示不同的 n 所對應到的 $(1-x)^{-n}$ 展開式係數，再以每行的不同「位置」來表示不同的「項」，並於表中紀錄下各項係數。

因此，和算家的「表」不單只是作為記錄數值與結果之用，有些「表」的內容包含了數學性質、或者隱含了某種數學公式，同時，整張表也可以看成一種結構性的數學物件，表中的元素也會隨其所在位置或者所在行列的不同，而具有不同意義。「表」中所含元素—諸如數值或符號或關係式等—亦為概念性的數學物件，而「表」便整合連結了這些物件，形成了結構性的關係。

另外，此表中的數字也隱含了許多特殊的規律，若以左上角為頂點，此表亦相當於巴斯卡三角形，因此，當和算家造出這些表的前幾行之後，透過表中數值呈現出的規律與關係，便可將此表繼續擴張與推廣，相當於可將 $(1-x)^{-n}$ 的展開式作進一步的推廣。換言之，列表的方式，有助於發現其中的規律，從這些規律，也易於再將表擴展或推廣至更一般化的情況。

和算家的研究一般著重於問題的求解與「術」（演算法或公式）的探求，然而十九世紀和算家們大量創制諸類數學表，則突顯出他們開始重視數值之間的關係或者幾何量之間的關係，不再只局限於傳統數學文本中以問題和「術」作為主要核心，⁹而是從設題與施術等數學知識活動，擴展到對數值關係與幾何關係的追求。

另一方面，小出兼政（2008）在《圓理算經》自序中提到：「凡圓理之法，用表得解術者，皆始自和田子，無制表之術，稱不得捷徑之解術。」可見「表」成為當時和算家探求問題答案的重要認知工具，他們將許多公式、性質、數值關係、代數關係式以及幾何關係式等，濃縮記錄於諸「表」中，作為既知的數學知識與工具，待適用場合時，引以為用，簡化了探求演算法或幾何關係式的過程。

例如圖 2 是十九世紀和算家和田寧所發明的積分法之典型流程，在求各類幾何問題的過程裡，「表」扮演了相當重要的角色。過程中，他首先將欲求長度、面積或體積的圖形作適當的分割，分割後需使用相應的（矩線）表，進而表示出所需的線段微元 L_i （或面積微元 A_i 、體積微元 V_i ），而後再對這些微元求和。此求和的過程中，同樣需要檢（八象或八態）表，將這些微元中帶根式的部份作展開，接著，將所有（無限多個）幾何微元的展開式作加總，再檢（疊）表求得無窮級數和，最後，便可整理得所求的術—演算法或幾何公式、關係式。

⁹ 和算傳承自傳統中算，江戶早期的數學文本中，主要記載了各類數學問題以及問題的解法、術和數值解。而江戶數學家用以發表數學研究成果的「算額」上，也是如此。但十九世紀的和算文本中，則包含了與「單一數學問題」無關的「表」、數學關係式幾何關係式等，甚至以「表」的類型對數學問題作分類。

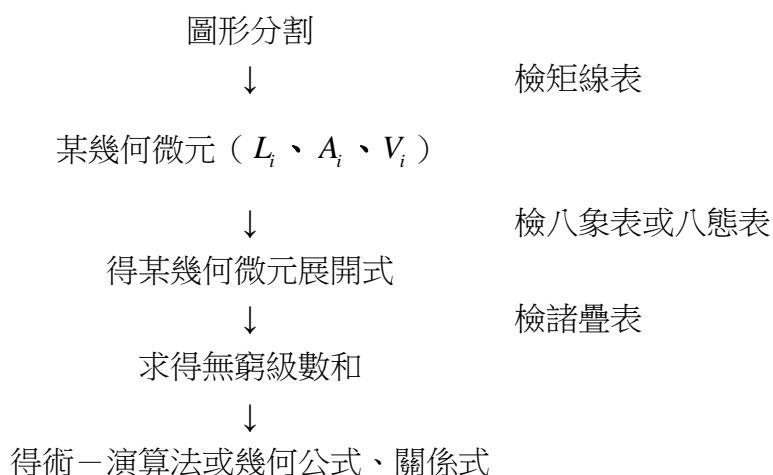


圖 2 和田寧積分法的典型流程圖

綜合來看，「表」作為一種新型態的認知工具，透過「表」的使用有助於和算家獲取新知、求解問題或核證演算法。最後，總結「表」的主要功用，包含：1.記錄知識，2.以二維的方式紀錄數值、變量或符號之間的關係，3.紀錄數學公式或性質，4.演算法的濃縮，5.作為重要認知工具，用於問題的求解與求術的過程中，6.讓初學者觀察數學公式中元的變化。

二、表與術的比較

說明了「表」的特色與功能後，接下來，我們進一步與「術」作比較，以瞭解「術」與「表」在和算文化裡扮演的角色。

「術」通常以文字敘述的方式呈現，列出依序執行的操作或數學運算，以及被操作的數或量。「表」通常是格子狀的矩形陣列，格子中所包含的主要數學物件為數字與籌式符號，有時也包含了文字說明。「術」通常可視為一種程序性且機械性的演算法，通常具有概括性與抽象性，有些時候可看成一個數學公式。一旦給定了問題條件中的相關數據後，透過術文中的演算法，可逐步進行操作與運算，機械而程序地獲得所求的值。至於「表」，通常以二維矩形陣列的方式，記載或列出許多數值與符號。有些「表」，單純作為紀錄數與式之用；另有些「表」，進一步記錄了數或幾何量之間的關係；亦有些「表」，隱含了數學性質、數學公式，亦或記載展開式之各項係數。

一般而言，「術」與「表」的內容，皆隱含了數值或幾何量之間的關係。但兩者之呈現方式則大不相同。「術」的內容所呈現的，是一種動態轉化的關係，連結了條件與所求量。依據問題給定條件中的數據或抽象的幾何量，透過術文中的演算法，機械而程序地逐步作變換，最終得到所求數據或幾何量，因此，「術」可視為從給定條件至所求量之間的轉化關係。同時，「術」所呈現的關係通常是「動態」的、「程序性」的。例如，「術」文中常出現「置」、「列」、「寄位」、

「寄左」等與動作有關的詞，或者「加」、「減」、「乘」、「除」、「自之」、「開方」等與實際計算或執行計算法則相關的動詞，再再反應出「術」所呈現出的動態操作特色。

另一方面，「表」所呈現出數值、符號與幾何量之間的關係是「靜態」的，並具有某種「結構性」。例如藤田貞資（1781）在《精要算法》〈中卷〉所造的兩個數值表，除了記錄滿足特定條件的三角形邊長，也可看成滿足特定條件的三角形，其三邊長之間的數值關係。又或者安島直圓（2009a）於《不朽算法》〈下卷〉所列表的內容，相當於表現出 $y = 10^{n \cdot 10^{-k}}$ 一式中， y 與 n 、 k 等變量之間的關係。另外，松永良弼（2009a）《方圓雜算》書中列出許多表，¹⁰則以抽象化的數學式，表示出一系列與圓相關的圖形中，所蘊含的相似直角三角形勾、股、弦長之間的關係。

小出兼政（2008）《圓理算經》〈下卷〉的「圓弧積線表」，羅列了圓積、圓周長、弧積、弧背、矢、弦有關的幕級數展開式，此表的内容，可視為將文本中與圓積、圓周長、弧積、弧背、矢、弦等問題有關的「術」，轉換成數學式，即透過和算家的符號系統，將原本程序性、文字描述的「術」表示成結構性的數學物件（數學式），例如：

$$A = D^2 \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11} - \dots \right)$$

可看成圓積 A 與直徑 D 之間的關係。表中也列出了弧長 s 與弦 d 和矢 c 之間的關係式：

$$s = 2c \left(\frac{1}{2} + \frac{T}{3} - \frac{T^2}{15} + \frac{T^3}{35} - \frac{T^4}{63} + \frac{T^5}{99} - \dots \right), \quad T = \frac{4c^2}{d^2}$$

這些「表」的內容主要與幾何量之間的關係有關。另也有些「表」的內容與代數關係有關。例如《圓理算經》下卷所列「開方溟式出商表」的內容（如圖 3 所示），便是將「無窮」多項方程式的根，表示成各項係數的組合，藉此表可表示出「無窮多項方程式」的根，而該表的内容事實上也可看出「無窮多項方程式」的根與該方程式係數之間的關係。

¹⁰ 松永良弼(Matsunaga Yoshisuke, ?-1744) 是 18 世紀中期，關流重要集大成者，他繼承了建部賢弘在圓理方面的重要研究成果，他的《方圓雜算》一書，主要探討了圓中弧、矢、弦等公式，也討論了圓周近似值相關研究成果。

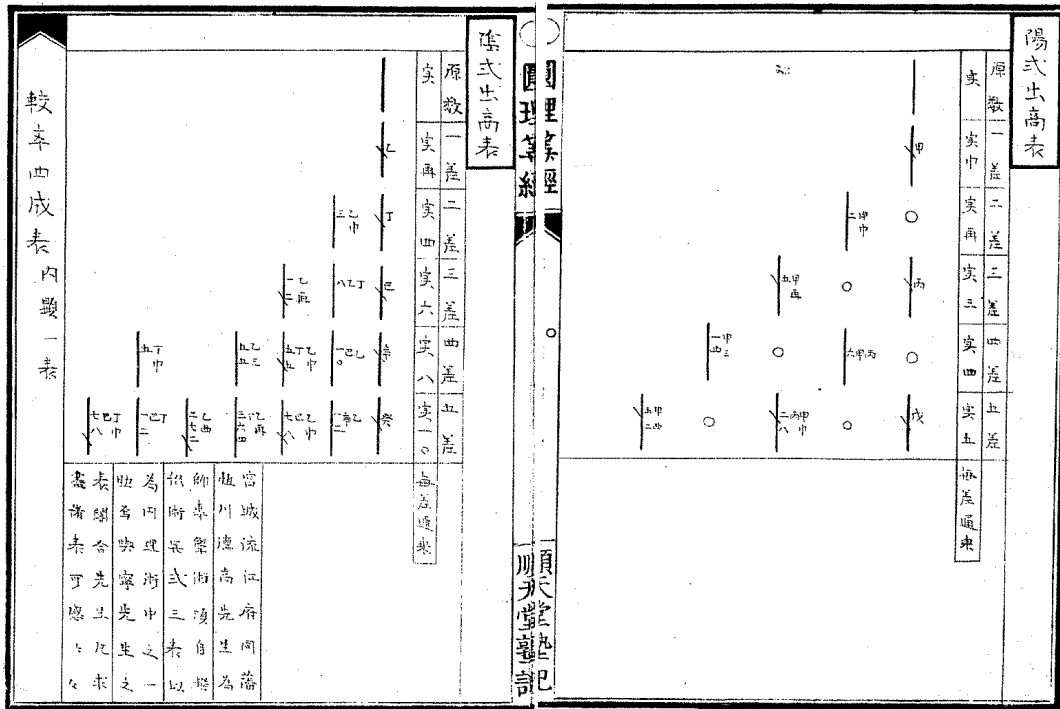


圖 3 《圓理算經》陽式出商表與陰式出商表之書影

例如已知「原溟元式」：¹¹

$$0 = -r + x + 甲x^2 + 乙x^3 + 丙x^4 + 丁x^5 + 戊x^6 + 己x^7 + 庚x^8 + \dots$$

利用「元式出商表」可將上述「原溟元式」中的 x 表示成 r 的展開式：¹²

$$x = -r + (-甲)r^2 + (-乙 + 甲^2)r^3 + (-丙 + 5甲乙 - 5甲^3)r^4 + (-丁 + 6甲丙 - 21甲^2乙 + 14甲^3 + 3乙^2)r^5 + \dots$$

又例如已知「原溟陽式」：

$$0 = -r + x + 甲x^2 + 丙x^4 + 戊x^6 + 庚x^8 + \dots$$

利用「陽式出商表」可將上述「原溟陽式」中的 x 表示成：¹³

$$x = -r + (-甲)r^2 + (甲^2)r^3 + (-丙 - 5甲^3)r^4 + (6甲丙 + 14甲^3)r^5 + \dots$$

另外，小出兼政 (2008) 在《圓理算經》書中，也整理並列出許多與無窮級數和有關的表，這些表主要可分成「疊率四成表」與「疊率見飛表」兩類，若以現代數學的角度來看，相當於建

¹¹ 在書中，小出兼政將「無窮多項方程式」分成原溟元式、原溟陽式與原溟陰式三類，若以現代符號表示，原溟元式指的是 $0 = -r + x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$ ，而原溟陽式表示 $0 = -r + x + a_2x^2 + a_4x^4 + \dots + a_{2n}x^{2n} + \dots$ ，原溟陰式則表示 $0 = -r + x + a_3x^3 + a_5x^5 + \dots + a_{2n+1}x^{2n+1} + \dots$ 。其中，這三類方程式的常數項皆為負，一次項係數為 1。又「陽式」是「元式」其三次項以上的奇數次項係數為 0 時的特例，而「陰式」則是當偶數次項係數為 0 時的特例。

¹² 元式出商表中所記載的，是如何利用元式的係數表示此「方程式」的解，且此解表示成展開式的形式。

¹³ 陽式出商表中所記載的，是如何利用陽式的係數表示此「方程式」的解，且此解表示成展開式的形式。

立了許多積分數值表。其中「疊率四成表」的內容，相當於列出當 s 與 t 為整數時， $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^s \left(\frac{1}{n}\right)^t$ 的數值表。表中的不同行與不同列，分別記錄了不同的 (s, t) 所對應之值。此表的內容亦可看成 $f(s, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^s \left(\frac{1}{n}\right)^t$ 的函數關係。

以表的某一行為例，該行的各列分別記錄下列無窮級數之值（亦可看成積分表）：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n}\right) = 1 \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2} \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{3} \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{k}{n}\right)^3 = \frac{1}{4} \quad , \quad \dots \quad ,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{k}{n}\right)^4 = \frac{1}{5} \quad , \quad \dots \quad \text{類似地，「疊率見飛表」的內容，則記錄了當 } s \text{ 為整數且 } t \text{ 為正整數時，}$$

無窮級數 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{\frac{s}{2}} \left(\frac{k}{n}\right)^t \frac{1}{n}$ 以及 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left[1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2\right]^{\frac{s}{2}} \left(\frac{k}{n}\right)^t \frac{1}{n}$ 的數值，亦分別可看成 $f(s, t) =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{\frac{s}{2}} \left(\frac{k}{n}\right)^t \frac{1}{n} \quad \text{與} \quad f(s, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left[1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2\right]^{\frac{s}{2}} \left(\frac{k}{n}\right)^t \frac{1}{n}$$

的數學家在求解求長度、面積與體積等積分相關問題時，直接檢索求得積分值。

除了上述「表」與「術」兩者本質上的差異之外，以下我們繼續討論它們所適用的場合。

「術」常可視為一般化的公式與關係，例如各類面積公式、體積公式或勾股定理等，然多數場合裡，「術」作為特定問題的演算法，即和算家針對特定數學問題時，所求得的相應的公式解，當任意改變問題中的數據時，執行同樣的演算法仍可求得答案。而特定的「術」通常只能用於其所相應的特定問題，不適用於其它的問題。換言之，絕大多數的「術」，都只是適用於特定問題的機械性演算法，適用性通常較為特定且狹隘。

然而，「表」適用的場合則較廣，例如十九世紀和田寧所造各類數值表與關係表，廣泛地被用於求各類「術」的過程中。許多「表」可視為既知的數學知識或性質，可被用於滿足該表前提條件的所有狀況。例如，檢表可得二項展開式（主要包含 $(1-x)^{\frac{1}{n}}$ 、 $(1-x)^{\frac{\pm n}{2}}$ 之類的展開式）的係數，可適用於需要二項展開式的一般性場合。又例如前述圖 2 中的「陽除表」，適用於任何與 $(1-x)^{-n}$ 相關的場合，當 x 小於 1 時，皆可使用此表將 $(1-x)^{-n}$ 展開。另外，「表」通常也比「術」來得容易推廣與擴張，例如與二項展開式有關的諸表，易從表中看出不同行或不同列數字之間的關係與規律，一旦瞭解並掌握了表中各行各列數值之間的關係與規律之後，藉由這些關係與規律，可將這些「表」推擴至任意的大小，並達到對原數學關係式的推廣，「術」則無此特性。

最後，筆者綜合前述論述以及相關比較結果，將「表」與「術」的特色作一簡單對比，置於表 4 中：

表 4

「表」與「術」的相關比較

	術	表
表徵	文字敘述	二維矩形陣列羅列數值與符號
細節	不同程序代表不同操作與運算	不同位置代表不同意義
本質	演算法	記錄知識與數量關係
數學內涵	亦隱含公式、關係式與定理	隱含公式、關係式與定理
特性	動態的數學操作 程度性、機械性	靜態的數學物件 概念性、結構性
使用	依程序執行操作或運算	檢表得數、得術或得關係式
數學實作	在紙上或計算用的表面上，對給定的數或量作操作與運算	查檢紙上所列表中的數或式，輸出所得用於解題或造術過程
通用性	特定問題的答案 求解特定類問題的演算法	求解各類問題的工具 適用於滿足條件的所有情況
擴展性	難以將舊「術」推廣成新「術」	易於依規律將表擴展、推廣
關係性	轉化的關係 (連結給定條件與所求數或量)	幾何或數值的結構性關係

資料來源：研究者整理繪製。

三、術與表之過渡－三種表徵

雖然「術」與「表」在形式上與許多特色上迥然不同，但「術」與「表」所涉及的數學知識並非兩互斥的集合，有些「數學知識」既可以「術」的方式來表達亦可利用「表」的方式呈現。從文本的考察中可以發現，歷代和算家處理 $(1-x)^{k/2}$ 類展開式時，共包含了三種不同的表徵方式。例如，十八世紀中期，《算法綴術草》一書中，討論開方問題時，所提出的「開平方術」(松永良弼，2009b, p. 345)：

計大方，自之，以減云積，名曰餘積。以大方為元數，元數以餘積相乘，以大方冪除之，又二除，為一差；一差乘餘積一段，以大方冪四段除之，為二差；二差乘餘積三段，以大方冪六段除之，為三差；三差乘餘積五段，以大方冪八段除之，為四差；四差乘餘積七段，以大方冪十段除之，為五差。……遞推之得逐差，置元數、陽差加之、陰差減之、得方面。

他以文字敘述的方式，表示出此程序性的術，而此術相當於表示出 $(a^2 \pm b)^{1/2}$ 的展開式，一方面可視為一種機械性、程序性的演算法，同時，亦可不斷地遞推，形成隱含了無窮多個步驟的「無窮展開式」。然而，將展開式表示成文字術文的形式顯得相當冗長，並且不易發現不同步驟之間

的關係與係數的規律，同時，不同展開式係數之間的關係與規律也不易查覺，因此，此類表徵方式，難以促進數學概念的認知與推廣。

到了十八世紀末期，安島直圓《綴術括法》一書裡，將 $(1 \pm x)^{1/2}$ 的展開式推廣至 $(1 \pm x)^{1/n}$ ， n 為任意正整數時的情況，他的表示法是結合了以文字敘述的程序性術文，以及格子狀的表來表徵此展開式。他先以程序性的「術」說明整個演算法的主要流程（安島直圓，2009b，p. 426）：

計泛商數，名原數，如開方冪數，自乘之，名定除法，定除法與原積相減，餘名定乘法。置原數，乘定乘法，以定除法除之，得數，一差除率除之，為一差。置一差，乘定乘法，以定除法除之，得數乘二差乘率，以其除率除之，為二差，……，為五差，餘仿之。

接著，再以「表」的方式列出展開式當中，各乘方（各項）所對應的係數（即表中的乘率與除率）。亦即與動態性操作過程有關的部份，主要以文字術文的方式來描述，而演算法過程中，欲求各差所需用到的「乘率」與「除率」等數字，則以表列的方式呈現（如表 5 所示），此表參考安島直圓《綴術括法》之「諸差乘率除率表」而作，原表列至七乘方，這裡受篇幅之限，僅列至四乘方。

表 5

安島直圓《綴術括法》的諸差乘率除率表。

號	一乘方		二乘方		三乘方		四乘方	
	乘率	除率	乘率	除率	乘率	除率	乘率	除率
一差		2		3		4		5
二差	1	4	2	6	3	8	4	10
三差	3	6	5	9	7	12	9	15
四差	5	8	8	12	11	16	14	20
五差	7	10	11	15	15	20	19	25
六差	9	12	14	18	19	24	24	30
七差	11	14	17	21	23	28	29	35

註：參考綴術括法重製。

值得注意的是，上述的「術」本身為一般性的演算法，適用於任意不同乘方的情況。換言之，只需一個「術」搭配此表，便可表示出 $n=1,2,\dots,k$ 時的展開式，不需要大費周章列出 k 個冗長的文字術文。因此，此表的內容相當於羅列了 $(1 \pm x)^{1/n}$ 展開式中的各項係數。例如第一列「一乘方」的內容搭配術文，相當於給出了下列展開式：

$$\begin{aligned}(1-x)^{\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}x^4 - \frac{7}{10} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}x^5 - \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{48}x^3 - \frac{15}{384}x^4 - \frac{105}{3840}x^5 - \dots\end{aligned}$$

再者，從此表易看出展開式的前後項關係，例如一乘方（即 $(1 \pm x)^{1/2}$ ）所列展開式各項系數的除率（分母），分別為 2、4、6、8、... 即偶數數列，而乘率（分子）為 1、3、5、7、... 則是為以 1 為首項，公差為 2 的數列。再看各乘方的一差除率為 2、3、4、5、...；二差乘率為 1、2、3、4、5、...；二差除率則為 4、6、8、10、...。從這些係數不難看出各乘方與各差乘率與除率之間的關係，因此，和算家可利用這些關係將表擴張，求得當 n 為其它正整數時的 $(1 \pm x)^{1/n}$ 展開式。

到了小出兼政的《圓理算經》，他更進一步將許多展開式完全濃縮於同一表中，且書中的表不再搭配文字術文說明。例如「陽商乘表」中的「一形」行，相當於給出了下列展開式：

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{48}x^3 - \frac{15}{384}x^4 - \frac{105}{3840}x^5 - \dots$$

而其它各行則分別為 $(1-x)^{3/2}$ 、 $(1-x)^{5/2}$ 、...、 $(1-x)^{13/2}$ 的展開式。換言之，針對同一個（類）數學知識而言，發展過程中存在了三種不同的表徵方式，松永良弼表徵成純術文的方式，而安島直圓則是術文輔以表的方式，但到了小出兼政則完全以表的方式來呈現。其中，「術」的標記法主要是以文字，展現出程序性、機械性、動態的演算法。而「表」則呈現出前後項係數的結構與關係，或者呈現出已知幾何量與所求幾何量之間的關係，是一種靜態的數學物件，同時也更著重於此關係式本身。換句話說，這些和算數學知識的演化，包含了從「術」過渡到「表」的三種表徵，從動態與程序過渡到靜態、結構性的數學物件。三種表徵的演化除了佐證表在和算的重要性與日俱增，並且展現出數學概念發展過程的「程序－物件」二元性特色。

伍、數學教育與數學史連結的新進路與反思

一、認知理論與數學概念發展

過去許多數學史研究，著重在分析、理解數學家的數學研究成果，例如數學家所提出的問題本身、解讀術文的內容與正確性、「術」與問題的連結、「表」的內容與其表示的數學公式或數學性質等。又過往 HPM 相關研究主要是數學史在數學教育的應用，透過歷史故事或者數學概念發展史上的實例，引入數學教學設計與數學教材中，增進學習者的情意或服膺數學概念的理解為目的，數學史作為數學教學的輔具，或者作為概念學習的媒介。

本研究則嘗試另一個方向的進路，將數學教育的理論與觀點，應用到數學史的研究。因此，筆者在文本分析與概念發展的分析過程中，除了貼近一手文本、貼近當時的歷史脈絡，詳實地

進行解讀外，也從 Sfard (1991) 的認知觀點切入，重新審視和算數學概念、數學物件－術、法、表－發展的脈絡與意義，特別是它們的結構性面向－作為靜態的數學「物件」(object)－與操作性面向－作為動態的數學「程序」。

過去，數學史家們著重於解讀和算文本中的問題，以及術、法與表之「數學意義」，並利用現代數學符號表示這些數學物件所蘊含的數學公式、數學方法與數學性質。然而，在引入 Sfard (1991) 的理論後，得以從不同角度探討這些數學物件之發展脈絡，更清楚地描繪和算知識與和算數學物件演化過程中所隱含的認知意義及其概念上的轉變。如同本研究發現，和算文本中二項展開式的發展、演化過程，呈現出從「術」過渡到「表」的三種表徵，展現出數學概念發展過程的「程序－物件」二元性特色。¹⁴這些二項展開式的發展，從十八世紀中期，松永良弼《算法綴術草》書中完全以文字呈現，具程序操作面向的「術」，到十八世紀末期，安島直圓《綴術括法》書中半程序與半結構的「術＋表」，再到小出兼政的《圓理算經》中結構物件面向的「表」。這呼應了 Sfard (1991) 的觀點，也說明為何大量的數學「表」會是和算發展晚期的產物，並成為江戶晚期和算家們的重要研究成果，不再只局限於問題與「術」的研究。

另一方面，過去數學史研究中，「術」與「表」是獨立的數學物件，除了外在表徵形式的差異之外，它們表示的亦是不同的數學概念或數學公式。更未有學者將它們放在一起討論與分析。然而，引入此數學教育的認知觀點後，研究者也得以理解和算文本中某些「術」與「表」之間的連結，以及兩者在概念發展過程的脈絡關係，更加豐富了解讀和算文本時的歷史想像。

二、計算工具與數學概念發展

和算家的計算工具主要包含傳自中國的籌算與珠算，本文所提到的「法」與籌算、珠算的使用有關。例如演算法中提及使用乘除法之場合，可利用珠算求值，至於開方法的使用則須借助於籌算或筆算系統。數學家不須再於術文中詳細說明數學法則的操作與計算程序，只需利用文字記錄「法」的名稱，當欲透過「術」中的演算法計算求得數值解時，則依據「術」所示之法則，在計算的表面，如算盤、珠算盤或紙上操作計算或演算的過程即可。其中，珠算多用於數值的計算，但對於須設立未知數、列方程式的數學問題而言，則必須使用籌算。然而，和算有許多問題須設列多個未知數，傳統籌算並無法處理，後來隨著和算家發展出筆算代數符號系統－傍書法與點竄術，得以解決。

上述筆算符號系統的發展與成熟，亦展現出從操作性的程序面向過渡到結構性的物件面向的特色，並且對於和算的「術」至「表」的發展有著關鍵性的影響。一方面，筆算符號系統解放

¹⁴ 又例如黃俊瑋 (2015) 的研究指出，和算分式符號與概念，同樣具有二元性特色，其發展過程亦是操作性的程序面向先於結構性的物件面向，從具程序與操作特色的文字敘述與除法，過渡至數學物件「分式」。

了籌算所能表示的未知數個數，同時它具有記錄知識的功能，幫助和算家將程序性、動態的術文，物化成靜態的、可進行操作的數學式，濃縮了冗長的術文程序，也使數學家發展出結構性的數學表徵「表」，透過符號與表的使用，大幅減化了文字術文中所包含的計算程序數量，也讓數學家們更容易將各類的「術」－公式或性質－進行一般化，並以「表」的方式進行統整與記錄，甚至進行推廣。亦即從傳統的籌算系統，發展出筆算代數符號系統，再加上筆算工具的使用，使得和算得以從中算的「問題－答－術」，慢慢發展成「問題、術、法、表」的知識架構。亦即，數學實作工具的發展與改良（籌算到筆算符號），影響了數學知識的發展與呈現的面貌。

15

三、在地化的和算數學文化

江戶時期和算發展的過程中形成了許多流派，當時數學教育的推動與數學流派有關。數學知識的傳承主要採師徒制的方式，由各和算流派的掌門人一家元一對弟子和門人傳授數學知識。這種制度於日本江戶初期成形，並被各種藝道（例如花道、茶道與棋道等）普遍採納。習算者依據各流派所制定的規範與制度，循序漸進地學習數學知識，並依據所學與所達到的數學程度，獲授不同等級的「免許狀」，證明其所屬的門派與所達到的數學能力。如此，在各流派裡的數學學習具制度性的規範，且數學本身成為一種具專業性的學門與知識。在當時，獲頒高級免許狀的和算家，也代表成為了精熟數學的專業人才，因而有機會受聘任職數學教師等工作，或者受任會計、工程、天文、曆法或製定全國地圖等與數學相關的工作。

另一方面，和算知識與文化的保存、整理與流傳，並非經官方機構或依官學的方式來發展與推廣，主要是由武士與庶民階層發起，由下而上的文化。和算的學習內容以及知識的決定權，並非在官方，學習制度的建立，亦非官方，主要都是各流派內的掌門人以及重要數學家所決定。展現當時數學家專業自主的特色，也反應和算流派對於江戶時期數學發展的重要意義與推動力量。

除了數學流派林立的特色之外，更發展出「遺題繼承」與「算額奉納」等在地化的數學知識活動。「遺題繼承」指的是當時數學家著書解答前人所遺留的問題之餘，會再於書末繼續提出新問題徵解，如此引發許多後繼數學家投入數學研究與新問題的設計，推動數學的發展。而「算額奉納」則是當時的數學家會將自己發明、設計的數學問題、答案與相關圖形畫在匾額上，並奉納發表於神社佛閣。除了展現自己與所屬流派的研究成果外，也可進行數學交流與流派之間的數學競技。

¹⁵ 這樣的歷史發展與反思，恰可連結到 108 數學課綱，強調藉由計算機等工具的引入與使用，來幫助學生認識、理解無理數、對數、三角比等概念。這樣的轉變，除了改變數學教學樣貌，是否本質上地影響學習者對於這些數學概念的理解方式與概念心像，將待進一步的研究。

無論是遺題繼承、算額奉納或是數學競技，都涉及了數學問題的設計與求解：利用相關知識輔以「法」的使用與「表」的檢索，造出概括性的演算法「術」。再者，依據「術」的流程，搭配「法」或「表」，利用計算工具在紙或計算表面上，逐步操作、計算，求得相應的數值解。因此，本研究中，對於「術」、「法」、「表」等和算數學物件的深入研究與釐清，皆有助於理解和算家進行數學研究與實作兩種知識活動面向，也助於理解和算在地化的數學文化特色。

陸、結論

「法」、「術」與「表」三類數學知識與數學物件，在和算社群的數學知識活動中，占據了核心地位，這些是他們從事數學研究時，所追求且關切的重要知識類型。本研究中，透過和算文本的分析，闡述這三者的意義、特性與功能，也進一步比較三者間的差異與關連，這樣的比較，有助於我們釐清這三者的意義與特色，從而理解當代和算家如何從事數學知識活動，與如何進行數學實作。

其中，「術」為程序性且機械性的演算法，有時隱含了某些數學公式或定理，並可視為將問題數據逐步作運算、操作、轉化，最終獲得問題答案的作業流程。它既是和算家尋求的答案類型，也是求得數值解的重要媒介，並且揭示了數與量之間的抽象關係。「法」是程序性的數學運算或數學方法，藉以計算求得數值，或常被鑲嵌於術文中，作為執行演算法的子程式或作業流程中的子程序。「表」則記錄、濃縮了數學知識，呈現出數學概念與數學物件之間的靜態關係與結構，並作為重要認知工具，被用於求解問題，以及探索、核證知識的過程中。

就和算的脈絡來看，「術」和「法」係為不同的數學物件，且具有不同的意義。「術」是抽象性的演算法（公式解），而「法」是求得數值的計算程序，和算家會以「術」作為問題的答案或求解的對象，而「法」的目的與功能，則是服膺於計算求出數值，或作為術的子步驟，作為求解問題過程中所依賴的「方法」或「工具」，而非解題的最終目標亦非問題的答案。¹⁶它們雖然都具有程序性的特色，但「關係性」、「機械性」以及「通用性」是主要差別。研究也發現，數學知識的演化過程，包含了從「術」過渡到「表」的三種表徵－從動態與程序過渡到靜態、結構性的數學物件。除了佐證「表」在和算發展過程日益重要外，也展現出數學概念的二元性特色。

和算文本中的「術」，一般專屬於特定的問題脈絡中，而「法」與「表」則為解決問題的數學工具，作為已知的數學事實，被廣泛地應用於各種求數與造術的場合。而「術」的執行程序裡，則透過「依...法」或「檢...表」等方式將「法」與「表」引出。最後，筆者在圖4中整理出問題、數與術（答案）以及法與表等數學物件之間的脈絡與關係。綜合來看，和算家提出數學

¹⁶ 例如前面提到的「置粟數，以斛價銀乘之，得該價銀也」與「置元粟數為實，以人數為法，除之，得每人分粟。」這是對應於兩個數學問題的「術」，而實際執行演算法（術）求得數值解的過程中，則分別使用了「乘」與「除」兩個「計算程序」。

「問題」後，存在研究與實作兩種知識活動面向：利用相關知識輔以「法」的使用與「表」的檢索，造出概括性的演算法「術」（如圖 4 中的實線箭頭所示）。再者，據已知數（量），依「術」的流程，搭配「法」或「表」，利用計算工具在紙或計算表面上，機械化地逐步操作、計算，可求得相應的「數」值解（如圖 4 中的虛線箭頭所示）。

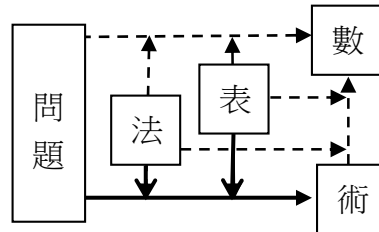


圖 4 問題、術、數、法與表之關係圖

換言之，和算家解題或研究的過程中，主要利用已知的數學性質搭配「法」與「表」，求得一般性的演算法或公式解—術—作為問題的答案。欲計算出數學問題的數值解時，則依據術文所指示的演算法逐步操作，透過「法」或「表」的使用，搭配計算工具計算求得數值解。求術的過程偏重於推論；求數的過程則著重於依程序操作與計算。而上述這些概念的釐清，也有助於我們理解數學知識發展過程的多樣化風貌與在地化的數學文化特色。

綜合來看，本研究引入知識論文化的觀點，透過歷史文本分析探討和算群體中「知識」、「實作」等概念的意義，以及他們所偏好的知識種類與答案類型。同時，也將數學教育的理論與觀點，應用到數學史的研究與文本分析的過程，解讀和算數學物件的特色、數學概念的發展與演化，理解「術」與「表」等不同數學表徵之間的連結、過渡與關係。對於數學教育與數學史研究與之連結，開啟更多元面向之論述與研究進路。因此，數學史研究與數學教育研究之間具有相輔相乘的作用：「數學史研究，因教學認知等觀點的結合，而展現多元的關懷與開闊的視野；數學教學活動，因歷史脈絡等元素的融入，而啟發豐富的想像與深刻的理解（黃俊瑋，2017）」。

參考文獻

- 小出兼政（2008）。圓理算經。載於徐澤林（譯注），**和算選粹**（504-650 頁）。北京：科學。（原著出版年：1842）【Koide Kanemasa (1842). *Yenri Sankyo*. In Hsu, Tse-Lin (Ed.), *Hesuan xuancui* (pp. 504–650). Beijing: Science and Technology Press. (Original work published in 1842) (in Chinese)】
- 安島直圓（2009a）。不朽算法。載於徐澤林（譯注），**和算選粹補編**（399-423 頁）。北京：科學。（原著出版年：1799）【Ajima Naonobu (1799). *Fukyu sampo*. In Hsu, Tse-Lin (Ed.), *Hesuan xuancui bubian* (pp. 399-423). Beijing: Science and Technology Press. (Original work published in 1799) (in Chinese)】

- 安島直圓 (2009b)。綴術括法。載於徐澤林 (譯注), *和算選粹補編* (426-431 頁)。北京: 科學。【Ajima Naonobu (2009). Tetsu-jutsu Kwatsuho. In Hsu, Tse-Lin (Ed.), *Hesuan xuancai bubian* (pp. 426-431). Beijing: Science and Technology Press. (in Chinese)】
- 松永良弼 (2009a)。方圓雜算。載於徐澤林 (譯注), *和算選粹補編* (349-387 頁)。北京: 科學。【Matsunaga Yoshisuke (2009). Ho-En Kusazan. In Hsu, Tse-Lin (Ed.), *Hesuan xuancai bubian* (pp. 349-387). Beijing: Science and Technology Press. (in Chinese)】
- 松永良弼 (2009b)。算法綴術草。載於徐澤林 (譯注), *和算選粹補編* (343-348 頁)。北京: 科學。【Matsunaga Yoshisuke (2009). Sampo Tetsu-jutsu kusa. In Hsu, Tse-Lin (Ed.), *Hesuan xuancai bubian* (pp. 343-348). Beijing: Science and Technology Press. (in Chinese)】
- 林力娜 (2010)。從古代中國的數學觀點探討知識論文化。載於祝平一 (主編), *中國史新論: 科技與中國社會分冊* (181-271 頁)。臺北: 聯經。【Karine Chemla (2010). An approach to epistemological cultures from the vantage point of some mathematics of ancient China. In Chu, Ping-yi (Ed.), *New perspectives on Chinese history: Science, technology and Chinese society* (pp. 181-271). Taipei: Linking. (in Chinese)】
- 建部賢弘 (2008)。綴術算經。載於徐澤林 (譯注), *和算選粹* (264-284 頁)。北京: 科學。(原著出版年: 1722)【Takebe Katahiro(1722). Tetsu-jutsu Sankyo. In Hsu, Tse-Lin (Ed.), *Hesuan xuancai* (pp. 264-284). Beijing: Science and Technology Press. (Original work published in 1722) (in Chinese)】
- 黃俊瑋 (2015)。和算關流分式符號表徵的發展、過渡與概念意義。*臺灣數學教育期刊*, 2(1), 41-68。doi: 10.6278/tjme.20150313.001【Huang, Jyun-Wei (2015). The Development, transition and conceptual meanings of the symbolic representations about fractions in the Seki school of wasan. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, 2(1), 41-68. doi: 10.6278/tjme.20150313.001(in Chinese)】
- 黃俊瑋 (2017)。和算家如何核證數學知識與獲得問題的答案: 一個 HPM 的觀點與反思。*科學史通訊*, 41, 17-36。【Huang, Jyunwei (2017). How wasan mathematicians justified mathematic knowledge and acquired the solution of problems: An HPM perspective and reflection. *The History of Science Newsletter*, 41, 17-36. (in Chinese)】
- 藤田貞資 (1781)。精要算法。京都, 日本: 天王寺屋市郎兵衛。【Fujita Sadasuke (1781). *Seiyo sampo*. Kyōto, Japan: Ten'nōjiyaichirobee. (in Japanese)】
- 關孝和 (2008a)。括要算法。載於徐澤林 (譯注), *和算選粹* (156-246 頁)。北京: 科學。(原著出版年: 1711)【Seki Takakazu (2008). Kwatsuyo Sankyo. In Hsu, Tse-Lin (Ed.), *Hesuan xuancai* (pp. 156-246). Beijing: Science and Technology Press. (Original work published in 1709) (in Chinese)】
- 關孝和 (2008b)。三部抄。載於徐澤林 (譯注), *和算選粹* (103-137 頁)。北京: 科學。【Seki Takakazu (2008). Sambusho. In Hsu, Tse-Lin (Ed.), *Hesuan xuancai* (pp. 103-137). Beijing: Science and Technology Press. (in Chinese)】
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36. doi: 10.1007/BF00302715

《臺灣數學教育期刊》稿約

2013.04.03 編審委員會會議通過

2013.09.27 編審委員會會議修訂通過

2014.09.04 編審委員會會議修訂通過

2017.03.17 編審委員會會議修訂通過

- 壹、《臺灣數學教育期刊》(Taiwan Journal of Mathematics Education)(以下簡稱本刊)是國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同發行之期刊，內容以出版數學教育領域相關議題的原創性論文為宗旨。本刊徵求符合宗旨的文稿，且以實徵性研究成果為主，回顧性論文需能整合相關之實徵研究，提出批判性或創發思考的評析。
- 貳、本刊每年發行兩期，分別於四月、十月出刊，並採電子方式發行。全年徵稿，隨到隨審。
- 參、本刊所刊之文稿須為原創性的學術論文之文稿，即未曾投遞或以全論文形式刊登於其他期刊、研討會彙編或書籍。若文稿在送審後自行撤稿，或出現一稿多投、修正稿回覆逾期、侵犯著作權等違反學術倫理等情況，將依下列規則處理：
- 一、來稿一經送審，不得撤稿。因特殊理由而提出撤稿申請者，案送主編決定；非特殊理由而自行撤稿者，一年內將不再接受該作者的投稿。
 - 二、若文稿被發現一稿多投、侵犯著作權或違反學術倫理等情況，除文稿隨即被拒絕刊登外，一切責任由作者自負，且本刊於三年內不接受該作者來稿，並視情節嚴重程度求償。
 - 三、作者應於發出文稿修正通知的三週內回傳修正稿及修正回覆說明書，逾期視同撤稿。若有特殊情況請先與本刊聯絡。
- 肆、未經本刊同意，已發表之文章不得再於他處發表。投遞本刊之學術論文須經編審委員會送請專家學者審查通過後予以刊登，被刊登文章之著作財產權歸國立臺灣師範大學數學系及台灣數學教育學會共同擁有，文責由作者自負。投稿至《臺灣數學教育期刊》之文章，若經編輯委員推薦且經作者同意，可轉稿至《臺灣數學教師》。
- 伍、文稿經初審結果為修訂後再審時，本期刊責任編輯將協助引導作者進行文稿修訂。
- 陸、文稿可以中文或英文撰寫，中文稿件字數以20,000字（英文10,000字）為上限（包含論文全文、中英文摘要、圖表、附註、參考文獻、附錄等），特殊邀稿不在此限。文稿請使用Microsoft Word 98以上之繁體中文文書軟體處理，中英文稿均請用單行間距之12級字新細明體或Times New Roman字體，以橫書方式於A4規格紙張上，文

稿上下左右各留2.5公分空白。

柒、中文文稿格式請參考本期刊論文撰寫體例的說明或已發行之文稿，若為英文撰寫之文稿、引用英文文獻以及數學符號、公式等請參考APA第六版出版手冊。投稿時應注意下列事項：

一、提交投稿基本資料表

(一) 文稿基本資料。

(二) 通訊作者之姓名、服務單位、職稱、通訊地址、聯絡電話和電子郵件地址。

一位以上作者時，非通訊作者只需填寫姓名、服務單位和職稱。

(三) 任職機構及單位：請寫正式名稱，分別就每位作者寫明所屬系所或單位。

(四) 頁首短題 (running head)：中文以不超過15個字、英文以不超過40個字元為原則。

(五) 作者註 (author note)：說明與本篇研究相關的資訊。

二、提交已簽署的《臺灣數學教育期刊》著作財產權讓與同意書。

三、除文稿正文外，還需包含中英文摘要，相關規定如下：

(一) 中文文稿的中文摘要在前，英文文稿則英文摘要在前。

(二) 中文文稿之中文摘要頁內容包括論文題目 (粗體20級字、置中)、摘要 (不分段，限500字以內) 及關鍵詞 (以五個為上限，並依筆畫順序由少到多排列)；英文摘要頁內容包括 Title (bold, 20 pt, central)、Abstract (不分段，限300字以內) 及 Keywords (字詞及順序須與中文關鍵詞相對應)。

(三) 英文文稿之英文摘要頁內容包括 Title (bold, 20 pt, central)，Abstract (不分段，限300字以內) 及 Keywords (以五個為上限，並依字母順序排列)；中文摘要頁內容包括論文題目 (粗體20級字、置中)、中文摘要 (不分段，限500字以內) 及中文關鍵詞 (字詞及順序須與英文關鍵詞相對應)。

(四) 內文格式詳見《臺灣數學教育期刊》論文撰寫體例。

四、若為修正稿，遞交修正的文稿 (上述第三點之資料) 上請以色字標示修改處，並需提交「修正回覆說明書」，依審查意見逐項說明修改內容或提出答辯。

捌、本刊審查流程分為預審與正式審查兩個階段：

一、預審：不符合本刊宗旨、品質要求，或撰寫體例者，逕行退稿或退回請作者修改後再上傳。

二、正式審查：為雙向匿名審查，除基本資料表外，不得出現作者姓名或任何足以辨識作者身份之資料，包括請先省略誌謝。匿名的參考格式為：

(一) 若本文引用作者已發表之文章，須以「(作者, 西元年)」或“(Author, Year)”；若引用作者已發表之文章不只一篇，則以「(作者, 西元年a)、(作者, 西元年b)、……」或“(Author, Year a)、(Author, Year b)、……”的中文作

者姓氏筆畫順序以及外文作者姓氏字母順序排列。

(二) 若在參考文獻中則以「作者(西元年), 期刊刊名。」或「作者(西元年), 書名。」、「作者(西元年)。編者, 書名。」或“Author (Year). *Title of Periodical.*”表示。

引用文獻中包含一位以上的投稿文章作者, 其所有著作皆須遵守上述規範。

範例1: 「林妙鞠、楊德清(2011)。故事融入小一弱勢學生之補救教學研究。**台灣數學教師(電子)期刊**, 25, 1-16。」一文的作者欲引用該文, 文中應以「(作者, 西元年)」表示, 參考文獻則以「作者(西元年)。**台灣數學教師(電子)期刊**。」表示。

範例2: 「李源順(2009)。三階段輔導模式 - 以數學學習領域為例。收錄於鍾靜和楊志強(主編), **優質實習輔導教師的增知賦能**(pp.141-157)。臺北市: 國立臺北教育大學。」一文的作者欲引用該文, 文中應以「(作者, 西元年)」表示, 參考文獻則以「作者(西元年)。收錄於鍾靜和楊志強(主編), **優質實習輔導教師的增知賦能**。」

範例3: “Chang S. L., & Lin, F. L. (2006). Investigations into an elementary school teacher's strategies of advancing children's mathematical thinking. *Taiwan Journal of Mathematics Teachers*. 5, 21-34.”的作者應以“(Author, Year)”引用該文, 參考文獻則以“Author (Year). *Taiwan Journal of Mathematics Teachers.*”表示。

玖、文稿以電子郵件方式投遞, 包括作者基本資料表、著作財產權讓與同意書與全文共三份資料。作者應負論文排版完成後的校對之責, 而被接受刊登的英文文稿, 作者需自行負責檢查文稿中的用詞、語法、拼寫、含意和邏輯的正確性, 並另提供中文參考文獻之英譯資料, 編輯委員僅負責格式上之校對。

壹拾、 投稿電子郵箱: tjmeassistant@gmail.com

《臺灣數學教育期刊》研究論文撰寫體例

2013.04.03 編審委員會會議通過

2013.09.27 編審委員會會議修訂通過

2014.09.04 編審委員會會議修訂通過

2017.03.17 編審委員會會議修訂通過

本期刊原則上依循美國心理學會(American Psychological Association)的撰寫格式，中文文稿請參考下面的說明或本刊已發表的文稿，若為英文撰寫之文稿、引用英文文獻以及數學符號、公式等請參考 APA 第六版出版手冊。文稿請使用 Microsoft Word 98 以上之繁體中文文書軟體處理。除另有規定外，中文字型一律採用新細明體，英文字型一律為 Times New Roman。

壹、 撰稿格式

- 一、投稿除需要附上作者基本資料表檔案外，中文稿件內容依序為中文摘要頁（含關鍵字）、英文摘要頁（含關鍵字）、正文（包括圖、表、附註、誌謝、參考文獻）以及附錄（若無必要可省略）；英文稿件之撰寫順序相同，唯中英文摘要頁位置對調。
 - 二、稿件版面以單欄版面橫向印列的A4規格紙張，上下左右各留2.5公分空白，除基本資料表頁外每頁需加註頁碼。文稿字數（包含摘要、正文、圖表、附註、參考文獻、附錄等）中文以20,000字為上限，英文以10,000字為上限。
 - 三、中文摘要頁內容包括論文題目（粗體20級字、置中）、摘要（不分段，限500字以內）、與關鍵字（以五個為上限，並依筆畫順序由少到多排列）。
 - 四、英文摘要頁內容包括論文題目（bold, 20 pt, central），並附英文摘要（不分段，限300字以內）及英文關鍵字（字詞及順序須與中文關鍵字相對應）。
 - 五、除各項標題、表之註記與另起一段之引文外，內文不分中英文均為12級字，單行行距。
 - 六、除另有規定外，中文字型一律採用新細明體，標點符號及空白字為全形字；英文字型一律為Times New Roman。
- 三、本期刊為雙向匿名審查，除基本資料表外，不得出現作者姓名或任何足以辨識作者身份之資料。匿名的參考格式為：
- (一) 若本文引用作者已發表之文章，須以「(作者, 西元年)」或“(Author, Year)”；若引用作者已發表之文章不只一篇，則以「(作者, 西元年a)、(作者, 西元年b)、……」或“(Author, Year a)、(Author, Year b)、……”的中文作者姓氏筆畫順序以及外文作者姓氏字母順序排列。
 - (二) 若在參考文獻中則以「作者(西元年), 期刊刊名。」或「作者(西元年), 書名。」、「作者(西元年)。編者, 書名。」或“Author (Year). Title of Periodical.”

表示。

引用文獻中包含一位以上的投稿文章作者，其所有著作皆須遵守上述規範。

範例1：「林妙鞠、楊德清（2011）。故事融入小一弱勢學生之補救教學研究。

台灣數學教師(電子)期刊，25，1-16。」一文的作者欲引用該文，文中應以「（作者，西元年）」表示，參考文獻則以「作者（西元年）。台灣數學教師(電子)期刊。」表示。

範例2：「李源順（2009）。三階段輔導模式 - 以數學學習領域為例。收錄於鍾靜和楊志強（主編），優質實習輔導教師的增知賦能（pp.141-157）。臺北市：國立臺北教育大學。」一文的作者欲引用該文，文中應以「（作者，西元年）」表示，參考文獻則以「作者（西元年）。收錄於鍾靜和楊志強（主編），優質實習輔導教師的增知賦能。」

範例3：“Chang S. L., & Lin, F. L. (2006). Investigations into an elementary school teacher's strategies of advancing children's mathematical thinking. *Taiwan Journal of Mathematics Teachers*. 5, 21-34.”的作者應以“(Author, Year)”引用該文，參考文獻則以“Author (Year). *Taiwan Journal of Mathematics Teachers*.”表示。

貳、正文

一、正文原則上包括「緒論」、「文獻探討」、「方法」、「結果」、「討論」與「參考文獻」等六部分，「緒論」含研究動機與目的、假設或研究問題等內容。前述格式為原則性規定，作者可依論文性質斟酌改變。

二、標題的層次、選用次序與字體為：

壹、16級字、粗體、置中

一、14級字、粗體、靠左對齊

(一)12級字、粗體、靠左對齊

1. 12級字、粗體、靠左對齊

(1)內縮1.5字元、12級字、粗體、靠左對齊

A.內縮1.5字元、12級字、底線、靠左對齊

1. 第一級標題為「緒論」、「文獻探討」、「方法」、「結果」、「討論」與「參考文獻」等，各層次標題選用次序為：壹、一、(一)、1、(1)、A 最多以六個層次為原則。
2. 第一、二、三、四、五層次標題請使用粗體。
3. 第一層次標題使用 16 級字，第二層次標題使用 14 級字，其餘 12 級字。
4. 第一層次標題置中，其餘靠左對齊。
5. 第一、二、三層次標題為單行間距，並與前後段距離均為 1 行；第四、五、六層次標題為 12 點最小行高，並與前後段距離均為 0.5 行。
6. 第五、六層次標題內縮 1.5 字元，而第六層次標題加上底線。
7. 標題請用字簡明，勿用句號或冒號。若逢頁尾最後一行，應移至次頁首行。

三、英文統計符號須用斜體字，例如 $F(1, 53) = 10.03$, t , F , M , SD , N , r , p 等。希臘字母則不要斜體，例如： α , β , ε , η 。

四、資料分析結果的有效位數須全文一致。恆小於「1」的數值，例如 $KR20$, α , p 等統計數值的個位數字「0」請省略。

五、文獻資料的引用一律採取文內註釋。引用文獻時，必須有作者姓名（中文作者姓名全列，英文作者僅列姓氏）及論文年份（中文文獻及英文文獻均使用西元年份）。相同作者在同一段中重複被引用時，第一次須寫出年代，第二次以後，在不造成混淆的情況下年代可省略。若在不同段落中重複引用時，則仍須完整註明。本文中引用之文獻必須在參考文獻中列出。文獻引用格式於下：

1. 當作者為一人時，格式為作者（年代）或（作者，年代）、Author (Year)或(Author, Year)。
2. 當作者為二人時，每次引用均須列出全部作者，在行文中，以「與」連接；在括號和參考文獻中，中文以頓號「、」，西文以“&”連接。格式為作者 1 與作者 2（年代）或（作者 1、作者 2，年代）、Author 1 與 Author 2 (Year)或(Author 1 & Author 2, Year)。
3. 當作者為三至五人時，第一次引用時所有作者均須列出，第二次以後僅需寫出第一位作者並加「等」字或“et al.”。在同一段落中重複引用時，第一次須完整註明，第二次以後僅需寫出第一位作者再加「等」字或“et al.”，可省略年代。若在不同段落中重複引用，則僅需寫出第一位作者再加「等」字或“et al.”，但仍需註明年代。
4. 當作者為六人以上時，每次引用都只列第一位作者並加「等」字或“et al.”。
5. 當作者或作者之一為機構時，第一次引用應寫出機構全名，並以中括號註明慣用之簡稱，第二次之後即可使用簡稱替代，並依上述一至四點處理。例如：行政院國家科學委員會(國科會, 2011)或(行政院國家科學委員會[國科會], 2011)、National Science Council (NSC, 2011)或(National Science Council [NSC], 2011)。

6. 當文獻為翻譯作品時，以原作者為主要作者，中文翻譯的文獻須註明原著出版年代，接續註明譯者姓名與譯本出版年代，作者與譯者之人數及其引用格式的規範與一般作者相同。英文翻譯文獻則僅須註明原著出版年代和譯本之出版年代，中間以斜線區隔，不須註明譯者姓名，作者人數及其引用格式的規範與一般作者相同。例如：Skemp (1987/1995)。
7. 當西文作者同姓時，須引用全名，且採「名在前姓在後」方式書寫。例如：A. J. Bishop (1985)和 E. Bishop (1970) 都認為……。
8. 在同一括號內同時引用多位作者的文獻時，依作者姓名筆畫（英文用字母）排序；若同時有中英文作者，則先列中文作者。不同作者之間用分號分開，相同作者不同年代之文獻用逗號隔開年代。
9. 在文章中引用同一作者在同一年度的多篇著作時，應在年代後加註 a, b, c……以茲區別。
10. 當引用文獻需標出頁數時，西文單頁為“p.”、兩頁以上為“pp.”，中文則以「頁」表示。例如：（洪萬生，2006，頁 167）、(Dubinsky, 1991, p. 102)、(Heath, 1956, pp. 251-252)。
11. 當引用之觀念或陳述，來自第二手資料時，應將原始資料和第二手資料同時註明。在括號中首先列出原始作者與年代，接續中文以「引自」，西文以“as cited in”註明第二手資料之作者與年代，並說明出處頁碼。例如：（Garner, 1988，引自蘇宜芬、林清山，1992，頁 246）、Peirce (1968, as cited in Sáenz-Ludlow, 2002, p. 289)
12. 引文超過中文 80 字（西文 40 字），則須另起一段，並改為標楷體 10 級字，左右縮排 2 字元，與正文間前後空一行，且在引文前後無需用引號。例如：

Schoendfeld (1992, p.335) 有一段話可以用來討論：

數學從其創生之始就是一種社會活動，在此活動中一群訓練有素的實踐者（數學科學家）從事組型的科學——基於觀察、研究和實驗，有系統地試圖要決定一個公理化或理論化之系統中的規律的性質和原理（此為純數學），或者從實在世界物體中抽象出來之系統的模式（此為應用數學）。數學的工具是抽象、符號表徵、和符號操作。然而學會運用這些工具，其意義乃謂一個人以數學方式思考而非如一個工匠使用工具。以數學的方式思考就是：（1）形成數學觀點——珍視數學與抽象的歷程，並偏愛其應用，（2）發展此學科的工具的能力，並應用這些工具以協助我們理解結構——數學的建構意義（mathematical sense-making）。

六、圖與表格：

1. 圖下方應置中書明圖序及圖之標題；表格上方應置中書明表序及表名，圖表序號均使用阿拉伯數字，且圖表序與圖名之間空一個中文字（或 2 個英文字母）。各圖表之標題及說明宜精簡，但不宜精簡至看正文才能知此圖的訊息。
2. 表格之製作以簡明清楚、方便閱讀為原則，頂端與底端採用粗線(1.5pt)繪製，中間與兩邊不必畫線。表序須配合正文以阿拉伯數字加以編號，並書明表之標題。
3. 每一個圖表的大小以不超過一頁為原則，如超過時，須在續表之表序後加上(續) / (continued)，但無須重現標題，如：表 1 (續) 或 Table 1 (continued)。
4. 圖與表格應配合正文出現，與前後段空一行間距。圖及表格內容若有解釋的必要，可作註記。註記與圖表之左邊界切齊，列在圖、表之下方，每註另起一行，按編號順序排列。

七、誌謝與附註：

1. 誌謝應力求簡短扼要，置於正文之後。誌謝二字為 16 級字、粗體、置中。誌謝文另行起、第一行內縮 2 字元、12 級字。
2. 附註應置於參考文獻之前，每項附註均另起一行，並以阿拉伯數字編號，依順序排列。

參、參考文獻

- 一、正文中引用過之文獻，必須全部列舉在參考文獻內，且不得列出未引用之文獻，接受刊登之論文，作者應另提供中文參考文獻之英譯資料。
- 二、每個作者第一行由第一格開始寫，第二行中文內縮三個字；英文內縮六個字母。中文參考文獻先寫作者姓名（年代），再用「。」接續「篇名」，「。」後再寫「期刊名稱」或「書名」以及「頁碼」。中文參考文獻「書名」或「期刊名及卷數」以粗體表示，其餘（含期數）維持標準樣式。英文參考文獻先寫作者姓名（年代），再用「.»接續「篇名」，「.»後再寫「期刊名稱」或「書名」以及「頁碼」。英文參考文獻「書名」或「期刊名及卷數」以斜體表示，其餘（含期數）維持標準樣式。即：

作者（年代）。文章篇名。期刊刊名^{粗體}，卷^{粗體}（期^{若無則可省略}），xxx-xxx。

Author, A. A. (Year). Title of article. *Title of Periodical*^{斜體}, *volume*^{斜體} (issue^{若無則可省略}),
xxx-xxx.

- 三、各種不同形式的中英文參考文獻的格式如下：

1. 期刊

中文格式：作者（年代）。文章篇名。期刊刊名，卷（期），xxx-xxx。

英文格式：Author, A. A. (Year). Title of article. *Title of Periodical*, volume(issue),

xxx-xxx.

2. 書籍

中文格式：作者（年代）。**書名**（版次若有須註記）。出版地：出版者。

英文格式：Author, A. A. (Year). *Title of book* (Edition). Location: Publisher.

3. 編輯著作：中文編輯著作以編者之姓名起始，其後以「編」、「編著」等標示其著作方式，以資區別。英文編輯著作以編者之姓氏起始，其後則為編者名字的縮寫，再加上“Ed.”、“Eds.”、或“Comp.”，以資區別其著作方式。

中文格式：編者編（年代）。**書名**（冊次若無則可省略）。出版地：出版者。

英文格式：Editor, A. A. (Ed.). (Year). *Title* (Volume若無則可省略). Location: Publisher.

4. 翻譯作品

中文格式：原作者（譯本出版年）。**翻譯書名**（譯者譯）。出版地：出版者。
（原作出版於xxxx年）

英文格式：Author, A. A. (Year). *Title* (B. B. Translator, Trans.). Location: Publisher.
(Original work published Year).

5. 書中的文章

中文格式：作者（年代）。文章名稱。收錄於編著姓名（編著），**書名**（冊次若無則可省略，頁xx-xx）。出版地：出版者。

英文格式：Author, A. A. (Year). Title of article. In B. B. Editor (Ed.), *Title of Book* (Edition若無則可省略, pp. xx-xx). Location: Publisher.

6. 研究計畫報告：若引述的報告是取自 ERIC (the Educational Resources Information Center)或 NTIS (the National Technical Information Service)，則在最後須以括號註明 ERIC 或 NTIS 的編號。

中文格式：作者（年代）。**報告名稱**（報告編號若無則可省略）。出版地：出版者。

英文格式：Author, A. A. (Year). *Title of report* (Report No.若無則可省略). Location: Publisher.

7. 研討會發表之論文（未出版）

中文格式：作者（年，月）。**論文標題**。發表於會議名稱。會議地點：舉辦單位若無則可省略。

英文格式：Author, A. A. (Year, month). *Title of paper*. Paper presented at the Title of the Symposium. Location, Country.

8. 未出版之學位論文

中文格式：作者（年代）。**論文名稱**。未出版之博／碩士論文，學校暨研究所名稱，大學所在地。

英文格式：Author, A. A. (Year). *Title of doctoral dissertation/master thesis*. Unpublished doctoral dissertation/master thesis, Name of

University, Location.

9. 網路資源

中文格式：作者若無則可省略（年月日若無則可省略）。網頁標題。檢自URL。

英文格式：Author, A. A. (Year, month day若無則可省略). *Title of webpage*. Retrieved from URL.

《臺灣數學教育期刊》投稿基本資料表

篇名	(中文)		
	(英文)		
總字數	稿件全文 (含中英文摘要、正文、參考文獻、附錄等) 共_____字。		
關鍵詞 (最多五個)	(中文)		
	(英文)		
頁首短題 (running head)	(請以不超過15個中文字或40個英文字元為原則。)		
通訊作者資料	姓名	(中文)	(英文)
	職稱		
	服務單位 (或就讀校系)	(中文)	
		(英文)	
	E-mail		
	通訊地址		
	電話	辦公室：() 分機	
行動電話：			
如為共同著作，請詳填以下共同著作人欄位，非共同著作則不需填寫。(以下欄位不敷填寫時請自行增加)			
共同著作人	姓名	服務單位 (或就讀校系)	職稱
第一作者 (<input type="checkbox"/> 通訊作者)	(中文)	(中文)	
	(英文)	(英文)	
第二作者 (<input type="checkbox"/> 通訊作者)	(中文)	(中文)	
	(英文)	(英文)	
第三作者 (<input type="checkbox"/> 通訊作者)	(中文)	(中文)	
	(英文)	(英文)	
作者註 (可複選)	<input type="checkbox"/> 本篇論文為碩、博士論文改寫，指導教授為_____。 <input type="checkbox"/> 本篇論文曾於_____發表。 <input type="checkbox"/> 本篇論文獲國科會補助，計劃編號：_____。		
1.茲保證本論文符合研究倫理。 2.茲保證所填基本資料正確，文稿未曾以任何方式出版或發行，且無一稿多投、違反學術倫理，或違反著作權相關法令等事情。 3.茲瞭解並同意貴刊著作權授權規範，並保證有權依此規範進行相關授權。 4.茲保證文稿已經所有作者同意投稿至《臺灣數學教育期刊》。			
填表人：_____ 填表日期：_____年_____月_____日			

《臺灣數學教育期刊》著作財產權讓與同意書

茲同意投稿至國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會共同發行的《臺灣數學教育期刊》之一文，名稱為：

立書人聲明及保證本著作為從未出版之原創性著作，所引用之文字、圖表及照片均符合著作權法及相關學術倫理規範，如果本著作之內容有使用他人以具有著作權之資料，皆已獲得著作權所有者之（書面）同意，並於本著作中註明其來源出處。著作人並擔保本著作未含有毀謗或不法之內容，且絕未侵害他人之智慧財產權，並同意無償授權國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會於本著作通過審查後，以論文集、期刊、網路電子資料庫等各種不同方法形式，不限地域、時間、次數及內容利用本著作，並得進行格式之變更，且得將本著作透過各種公開傳輸方式供公眾檢索、瀏覽、下載、傳輸及列印等各項服務。國立臺灣師範大學數學系與台灣數學教育學會並得再授權他人行使上述發行之權利。惟著作人保有下列之權利：

- 1.本著作相關之商標權及專利權。
- 2.本著作之全部或部份著作人教學用之重製權。
- 3.出版後，本著作之全部或部份用於著作人之書中或論文集中之使用權。
- 4.本著作用於著作人受僱機關內部分送之重製權或推銷用之使用權。
- 5.本著作及其所含資料之公開口述權。

著作人同意上述任何情形下之重製品應註明著作財產權所屬，以及引自《臺灣數學教育期刊》。

如果本著作為二人以上之共同著作，下列簽署之著作人已通知其他共同著作人本同意書之條款，並經各共同著作人全體同意，且獲得授權代為簽署本同意書。如果本著作係著作人於受僱期間為雇用機構所作，而著作權為讓機構所有，則該機構亦同意上述條款，並在下面簽署。

本著作之著作財產權係屬（請勾選一項）

- 著作人所有
 著作人之僱用機構所有

立同意書人（著作人或僱用機構代表人）簽章：_____

著作人姓名或僱用機構名稱：_____

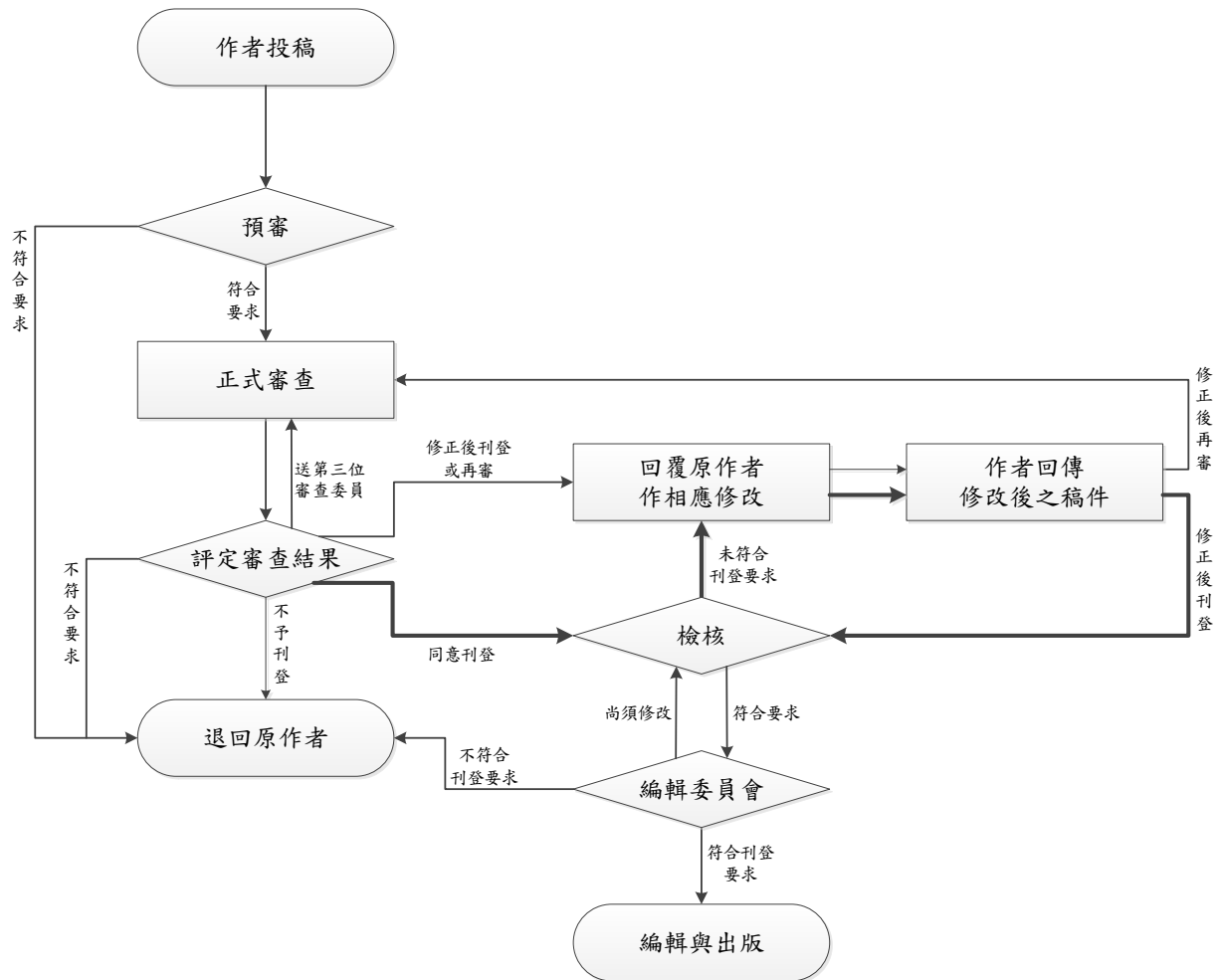
（正楷書寫）

中華民國 年 月 日

《臺灣數學教育期刊》編審辦法

2013.04.03 編審委員會會議通過

- 壹、《臺灣數學教育期刊》（以下簡稱本刊）之審查包括預審、正式審查兩個階段：
- 一、預審：檢視來稿是否符合本刊稿約之宗旨、論文品質以及進行論文格式之審查；
 - 二、正式審查：審查委員與投稿者採雙向匿名方式進行。主編就審查委員的回覆意見及論文品質決定接受或拒絕文稿，或是需要作者修改後再進行審查或檢核。需要「修正後再審」之稿件，交原審查委員或委由主編委任進行再審。所有文稿最後須經編輯委員會審查通過後，方能刊出。
稿件之最終審查決定以投稿後六個月內完成並通知作者。
- 貳、審查委員針對稿件之學術原創性、正確性及價值等條件從嚴審查，以確保所刊文稿的品質。審查委員可提供作者具建設性的修改建議，以利文稿的修正及品質提昇，並以下列其中一種的刊登建議回覆：
- 一、「同意刊登」：論文不需要修改可作原稿刊登。
 - 二、「修正後刊登」：通知作者依審查意見修改或答辯後刊登。
 - 三、「修正後再審」：要求作者依審查意見修改或答辯，修正稿由編輯委員會送原審查委員或委由主編委任進行再審。
 - 四、「不宜刊登」：通知作者退稿。
- 稿件審查的時間以三週為限，若超過期限，編輯委員會將去函提醒審查委員儘速審查，若逾六週審查者仍未寄回審查意見，則編輯委員會得再聘請另一位審查者取代之。每位審查者皆為無償審查，但會在每年第二期期刊中列名致謝。
- 參、本刊主編、副主編或編輯委員如投稿本刊，該委員應迴避推薦審查委員名單、參與審查結果決定之討論或經手處理與個人稿件有關的資料(包括審稿者資料、推薦審查委員名單、審稿意見等)。
- 肆、本刊預計每年四月和十月出版，稿件刊登順序由主編原則上依文稿性質與投稿時間之先後次序決定之，而第一作者的文稿以一篇為限，超過篇數之稿件留至下期刊登。
- 伍、本刊稿件之編審流程如下圖所示：



Publisher	Department of Mathematics, National Taiwan Normal University Taiwan Association for Mathematics Education
Editorial Board	
Chief Editor	Tai-Yih Tso (Department of Mathematics, National Taiwan Normal University)
Vice Chief Editor	Chao-Jung Wu (Department of Educational Psychology and Counseling, National Taiwan Normal University)
Editorial Panel	Kai-Lin Yang (Department of Mathematics, National Taiwan Normal University) Yuan-Shun Lee (Department of Mathematics, University of Taipei) Li-Yu Hung (Department of Special Education, National Taiwan Normal University) Yuan Yuan (Graduate School of Education, Chung Yuan Christian University) Hsin-Mei Huang (Department of Learning and Materials Design, University of Taipei) Chih-Chien Yang (Graduate Institute of Educational Measurement and Statistics, National Taichung University of Education) Der-Ching Yang (Graduate Institute of Mathematics and Science Education, National Chiayi University) Po-Hung Liu (College of General Education, National Chin-Yi University of Technology) Man-Li Liu (Graduate Institute of Mathematics and Science Education, National Pingtung University of Education) Yuan-Chen Liu (Graduate School of Educational Communications and Technology, National Taipei University of Education) Feng-Jui Hsieh (Department of Mathematics, National Taiwan Normal University) Hak-Ping Tam (Graduate Institute of Science Education, National Taiwan Normal University)
International Editorial Panel	Jane-Jane Lo (Department of Mathematics, Western Michigan University)

Address	No.88 Sec. 4, Ting-Chou Rd., Taipei City, Taiwan, R.O.C. Department of Mathematics, National Taiwan Normal University <i>"Taiwan Journal of Mathematics Education"</i>
TEL	886-2-7734-6576
FAX	886-2-2933-2342
E-mail	tjmeassistant@gmail.com
Website	http://tjme.math.ntnu.edu.tw/contents/contents/contents.asp?id=21

1 HPM 實踐在臺灣：以《HPM 通訊》為研究個案

／蘇惠玉

HPM Practice in Taiwan: A Case Study of HPM Tongxun (HPM Newsletter)

／ Hui-Yu Su

27 臺灣學術界數學史研究之現況分析與建議：以 1992 年至 2017 年學位論文為例

／蔡文榮、張鈞淇、劉柏宏

Analysis of current state and recommendations for HPM research in Taiwan: The case of theses and dissertations from 1992 to 2017.

／ Wen-Rong Tsay, Chun-Chi Chang, Po-Hung Liu

53 和算知識中的術、法、表之意義與特色

／黃俊瑋

The meanings and characteristics of mathematic knowledge in Wasan – Jutsu, hō and Hyō.

／ Jyun-Wei Huang

